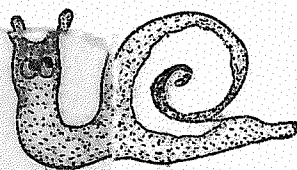


División de matemáticas
U.A.M.

Tesis Doctoral

ANALISIS ARMONICO GEOMETRICO:
LA RESTRICCIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Bartolomé Barceló Taberner



Dirigida por Antonio Córdoba Barba - Septiembre 1983

116T

Van
6655k

30

11/6+

ANALISIS ARMONICO GEOMETRICO:

LA RESTRICCION DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Bartolomé Barceló Taberner



Reg. f.c. - 7279

Tesis Doctoral dirigida por

Antonio Córdoba Barba

División de Matemáticas

Universidad Autónoma de Madrid

Septiembre 1983

A mis padres.

A Cristina.

INDICE

Presentación

Capítulo I Introducción

La transformada de Fourier

Teoremas de restricción

La restricción sobre rectas

El contraejemplo de L. Schwartz de la

síntesis espectral 19

Funciones radiales y funciones de Bessel 24

La restricción a la esfera. Los operadores de

Bochner-Riesz 29

La restricción (L^p, L^2) a la superficie del cono 44

Teoremas de interpolación 47

Integración fraccionaria 53

El principio de incertidumbre 56

El análisis armónico geométrico. La teoría de

Littlewood-Paley. La función maximal. Un

ejemplo 61

Capítulo II

La restricción a la superficie del cono

Capítulo III

El crecimiento logarítmico de la restricción en

el extremo $p = 4/3$ 105

Un teorema de restricción para series de Fourier

dobles 121

Capítulo IV

Introducción	131
La curva $\gamma(t) = t^k$	133
El cono de sección t^k		156
Referencias		187

P R E S E N T A C I O N

En 1962, James Watson y Francis Crick recibieron el premio Nobel de Medicina por su descubrimiento de la estructura helicoidal del ADN mediante fotografías de difracción de rayos X. El conocimiento experimental de la estructura molecular de sustancias cristalizadas a partir de sus fotografías de difracción se fundamenta en la siguiente ley física de Lawrence Bragg:

Sea $\rho(x)$ la función de densidad electrónica de una sustancia cristalizada, si se incide un haz paralelo de rayos X monocromáticos sobre ella, entonces la radiación difractada que llega a un punto ξ que esté suficientemente lejos del cristal es precisamente la transformada de Fourier $\hat{\rho}(\xi)$.

Aparte de esta presentación más o menos divertida del tema, desde el punto de vista matemático, nos interesa relacionar las propiedades que hay entre una función o distribución que tenga su soporte en un subconjunto de \mathbb{R}^n y su transformada de Fourier, esto es lo que constituiría un teorema de extensión.

Un teorema de restricción es el dual del problema anterior: dada una función \hat{f} definida en \mathbb{R}^n decir como es su transformada de Fourier f sobre un subconjunto prefijado de \mathbb{R}^n .

Aunque C. Fefferman y E. Stein ya habían obtenido teoremas de restricción sobre la esfera S^{n-1} de \mathbb{R}^n para estudiar los operadores de Bochner-Riesz, [10], el primer teorema completo de restricción de la transformada de Fourier que aparece en matemáticas es debido a A. Zygmund ([36], 1973):

Dada una función $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, entonces su transformada de Fourier $\hat{f}(\xi)$ existe en casi todo punto ξ de la circunferencia unidad S^1 de \mathbb{R}^2 y se cumple además

$$\left(\int_{S^1} |\hat{f}(\xi)|^q d\sigma \right)^{1/q} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \quad (1)$$

para $1 \leq p < 4/3$, $q = p'/3$.

Posteriormente se ha estudiado la restricción sobre curvas y superficies más generales quedando de manifiesto que la curvatura es fundamental. La "redondez", al contrario de lo que sucede con los multiplicadores, da buenos resultados de restricción.

El objetivo de esta memoria es estudiar la restricción de la transformada de Fourier desde el punto de vista del análisis armónico geométrico. Está dividida en cuatro capítulos:

El capítulo I es introductorio, en él he preten-

dido dar un enfoque original y desde el punto de vista geométrico de lo conocido sobre restricción de la transformada de Fourier hasta el momento.

El capítulo II contiene el resultado más importante de este trabajo:

Dada la superficie de un cono en \mathbb{R}^3 se cumple

$$\left(\int_{\Gamma} |\hat{f}(\xi)|^q d\sigma \right)^{1/q} \leq c_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \quad (2)$$

para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ con $1 \leq p < 4/3$, $q = \frac{1}{3}p$, y donde $d\sigma$ es la medida tal que, si parametrizamos el cono en coordenadas polares $(r \cos \theta, r \sin \theta, r)$, es $d\sigma = dr d\theta$. La desigualdad es falsa para otros índices p, q .

A pesar de que lo mejor sería obtener la restricción sobre la esfera unidad S^2 , problema que aún sigue abierto, es este último el primer resultado completo que aparece para superficies en \mathbb{R}^3 .

En el capítulo III se estudia en qué medida la desigualdad (2) deja de ser cierta en el extremo $p = 4/3$. Contiene también un teorema de restricción para series de Fourier en el plano.

El capítulo IV trata de la restricción sobre curvas en el plano del tipo (t, t^k) , $k \geq 2$, y se mejoran los resultados sobre la misma de L. Ruíz [22] y P. Sjölin [23]. Después se estudia la superficie del "cono" cuyas secciones sean como la curva (t, t^k) .

Las demostraciones son en su mayoría geométricas y permiten entender mejor el papel que juega la curvatura en estos temas.

Los dibujos que aparecen son más bien cualitativos y pretenden dar una idea de como actúa la geometría. Así por ejemplo, los rectángulos de las descomposiciones son en realidad mucho más largos y finos que los dibujados. A lo largo de las demostraciones pueden ir apareciendo diferentes constantes, que para no hacerlas más pesadas se indican siempre con la misma letra -

Por último quiero dar las gracias a Carolina y a Paloma, por su gran esfuerzo en mecanografiar esta memoria, a Rocío, por sus dibujos, y a todos mis compañeros de esta División de Matemáticas, en especial al profesor Antonio Córdoba por su aliento constante, sin cuyo estímulo no habría tenido la suficiente fe para terminar todos estos cálculos.

C A P I T U L O I

Introducción

LA TRANSFORMADA DE FOURIER.-

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ se define la transformada de Fourier de f como la función

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

donde $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \dots + x_n \xi_n$ si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $dx = dx_1 \cdot dx_2 \cdot \dots \cdot dx_n$ es la medida de Lebesgue de \mathbb{R}^n .

En principio esta definición es meramente formal y habrá que ver las condiciones que puedan imponerse a la función f para que la integral que define su transformada de Fourier sea una expresión que tenga sentido.

1.2 Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces existe $\hat{f}(\xi)$
 $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|$, además $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$, es decir, $\hat{f}(\xi)$ es con-
tínua y $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ (lema de Riemann-Lebesgue).

Luego si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es continua y tiene sentido restringir \hat{f} a un punto o a cualquier subconjunto de \mathbb{R}^n .

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ se demuestra que
 $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ lo que permite extender el operador $T(f) = \hat{f}$,

que en principio está definido sólo en el subespacio denso $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ a un operador lineal continuo $\hat{\cdot} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$

Además se tiene la fórmula de inversión de Fourier

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

para toda función f de $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ y podemos recuperar f a partir de \hat{f} . Luego

1.3 La aplicación $\hat{\cdot} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ definida por $T(f) = \hat{f}$ es una isometría (teorema de Plancherel).

De 1.2 y 1.3 por interpolación (véase pág. 47) obtenemos

1.4. (Desigualdad de Hausdorff-Young)

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$$

para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq 2$. p' es el dual de p , es decir $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Resultado que nos dice que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq 2$ entonces existe su transformada de Fourier y además nos da información de como es en cierto modo su "tamaño".

Observemos que de 1.4 en particular se deduce que dada una función f de $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p \leq 2$, $\hat{f}(\xi)$ existe en casi todo punto de \mathbb{R}^n . Sin embargo, dado un subconjunto de medida nula de \mathbb{R}^n no podemos asegurar en principio que se pueda restringir \hat{f} a él.

La transformada de Fourier tiene un buen comportamiento con respecto a las rotaciones, traslaciones y dilataciones de \mathbb{R}^n :

1.5 La transformada de Fourier conmuta con las rotaciones

Una rotación ρ alrededor del origen vendrá dada por una matriz ortogonal con $\det \rho = +1$, 1.5 afirma que dada una función f entonces $(f \circ \rho)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\rho(\xi))$, es decir, que si giramos el espacio \mathbb{R}^n , le aplicamos y calculamos la transformada de Fourier, es lo mismo que si calculamos la transformada de Fourier y componemos con el giro

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\quad} & f(\rho x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{f}(\xi) & \xrightarrow{\quad} & \hat{f}(\rho(\xi)) \end{array}$$

La traslación de f por el vector h , $\tau_h f$, es la función $\tau_h(f)(x) = f(x-h)$, entonces

$$1.6 \quad (\tau_h f)^\wedge(\xi) = e^{-2\pi i h \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$$

En cuanto a dilataciones, si $\delta > 0$ escribimos

$$(\phi_\delta f)(x) = f(\delta x)$$

$$(\phi_\delta f)^\wedge(\xi) = \frac{1}{\delta^n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$$

Como se comprueban sin más que hacer algún cambio de variable en la definición.

Otra observación importante es la relación entre la suavidad de una función y el decrecimiento de su transformada de Fourier en el infinito:

1.8 Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es un multifíndice

$$(D^\alpha f)^\wedge(\xi) = (-2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$$

TEOREMAS DE RESTRICCIÓN.-

Dada una función localmente integrable $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y dado un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$, podemos preguntarnos si tiene sentido restringir la transformada de Fourier de f , \hat{f} , a M .

Una manera más precisa de plantear este problema es controlar el "tamaño" de \hat{f} sobre M en relación con el "tamaño" de f y un buen procedimiento para estudiar

esto es averiguar en que espacios L^p están.

Dado $M \subset \mathbb{R}^n$ una medida sobre M buscaremos pues desigualdades del tipo

$$1.9 \quad \left(\int_M |\hat{f}(\xi)|^q d\mu \right)^{1/q} \leq c_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para ciertos índices p, q y para toda función de $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Obsérvese que un resultado como 1.9 implicaría automáticamente la existencia de $\hat{f}(\xi)$ en casi todo punto de M , lo cual no deja de ser paradójico, pues M puede ser perfectamente de medida nula en \mathbb{R}^n y en principio tanto f como su transformada \hat{f} están definidos salvo en conjuntos de medida nula.

Para evitar este problema, 1.9 se estudia como una desigualdad "a priori", es decir, se establece para funciones de una clase densa en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para los que todo tenga sentido, como por ejemplo las funciones de la clase de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$, con lo que tendríamos el operador

$$\begin{aligned} T : L^p(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^q(M, \mu) \\ &\rightarrow \hat{f}|_M \end{aligned}$$

como una extensión por densidad.

es el "operador restricción", $< p, q <$
 podemos considerar su adjunto

$$T^* : L^{q'}(M, \mu) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n)$$

que está definido por

$$T^*g = (g \, d\mu)^\wedge$$

ya que

$$\langle Tf, g \rangle = \int_M \hat{f} \, g \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f (g \, d\mu)^\wedge dx = \langle f, T^* g \rangle$$

T^* es entonces un "operador de extensión".

De este modo, probar 1.9 equivale a probar que
 T^* es continuo, es decir, que se cumpla la desigualdad

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |(g \, d\mu)^\wedge(\xi)|^{p'} d\xi \right)^{1/p'} \leq C \left(\int_M |g(x)|^{q'} d\mu(x) \right)^{1/q'}$$

para toda $g \in L^{q'}(M, \mu)$.

Esta es la dualidad restricción-extensión que
 presentan estos teoremas y suele ser muy útil, ya que gene
ralmente es más sencillo tomar una función que tenga su so
porte en M y calcular la transformada $(g \, d\mu)^\wedge$ que pro
bar 1.9 directamente.

LA RESTRICCION SOBRE RECTAS.-

Vamos a ver que no hay restricción de la transformada de Fourier a rectas, o más generalmente, no hay restricción a variedades lineales de \mathbb{R}^n .

Para mayor simplicidad tomaremos $n = 2$. Como la transformada de Fourier conmuta con rotaciones y se comporta bien con traslaciones, podemos suponer que la recta es la recta $x = 0$ tomando una γ que sea

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

será

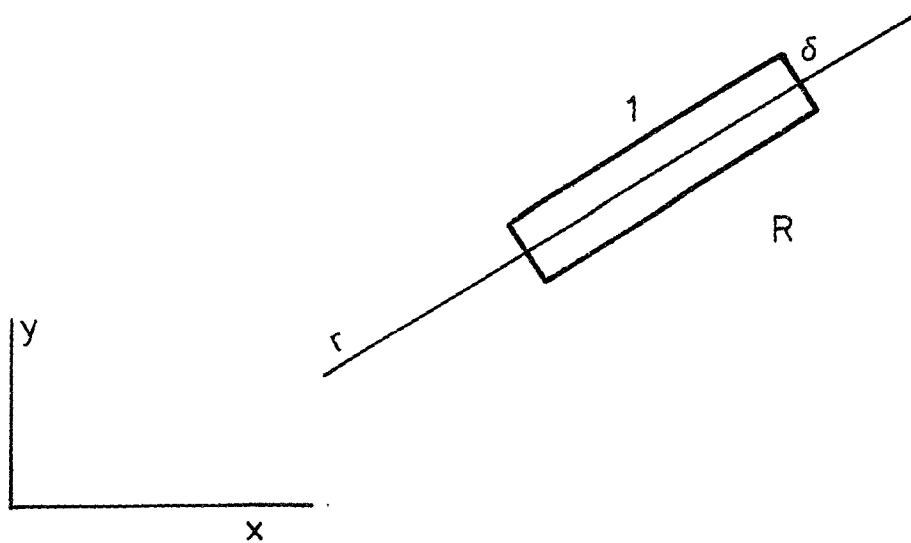
$$\hat{f}(\xi, \eta) = \hat{g}(\xi) \cdot \hat{h}(\eta)$$

y como

$$\hat{f}(\xi, \eta)|_{\xi=0} = \hat{g}(0) \cdot \hat{h}(\eta)$$

si esta restricción tuviera sentido para casi todo $\eta \in \mathbb{R}$, existiría $\hat{g}(0)$, y esto es en general falso, pues si no es integrable no existe $\hat{g}(0)$.

Podemos dar también una demostración geométrica del mismo hecho. Dada la recta γ tomemos un rectángulo γ_δ de anchura $\delta > 0$ y longitud L tal como en la figura



si para algún p, q fuera

$$\|\hat{f}\|_{L^q(r)} \leq c \|f\|_p$$

tomando como la función característica del rectángulo R , se tendría

$$\|\hat{f}\|_{L^q(r)}$$

pero si $\hat{f} = \chi_R$, será $f(x) = \hat{\chi}_R(-x)$. Por el principio de incertidumbre (ver pág. 56) tendrá su soporte en el rectángulo dual de R , de dimensiones $1 \times \delta^{-1}$ $|f(x)|$ en su soporte es del orden de la medida de R , es decir

$$\|f\|_p \cong (\delta^{-1} \delta^p)^{1/p} = \delta^{\frac{p-1}{p}}$$

luego sería

$$1 \leq C \delta^{\frac{p-1}{p}}$$

para todo $\delta > 0$. haciendo $\delta \rightarrow 0$ llegamos a una contradicción.

EL CONTRAEJEMPLO DE L. SCHWARTZ DE LA SINTESIS ESPECTRAL.-

En 1948 Laurent Schwartz dio el primer ejemplo de un conjunto que no es de síntesis espectral para el álgebra $L^1(\mathbb{R}^3)$. Daremos este ejemplo ya que probablemente es la primera vez que aparece la restricción de la transformada de Fourier en el análisis matemático.

Recordemos algunas definiciones y resultados:

Sea G un grupo abeliano localmente compacto, entonces existe una medida de Borel positiva, μ invariante por traslaciones, tal que

$$\mu(V) = \sup \{ \mu(G) \mid G \subset V, \quad G \text{ compacto} \}$$

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(U) \mid E \subset U, \quad U \text{ abierto} \}$$

para todo V abierto y E medible.

Esta medida es única en el sentido de que si es otra medida con las mismas propiedades, entonces existe $\alpha > 0$ tal $\mu = \alpha \nu$, se llama una medida de Haar.

Sea \hat{G} el grupo de los complejos de módulo unidad con la multiplicación, llamaremos grupo dual de G al grupo de homomorfismos continuos de G en \hat{G} .

$$\hat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{C})$$

Dada $f \in L^1(G)$, se define la transformada de Fourier de f como la función $\hat{f} : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ definida sobre los caracteres $\gamma \in \hat{G}$ por

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x) \overline{\gamma(x)} d\mu(x)$$

En el grupo dual de G , \hat{G} , introducimos la topología más débil que hace las transformadas de Fourier \hat{f} continuas para todo $f \in L^1(G)$. Se tiene entonces el teorema de dualidad de Pontryagin que afirma que el dual de \hat{G} es G , es decir $(\hat{G})^\wedge = G$, y un teorema de Plancherel y una fórmula de inversión de Fourier como en el caso de la transformada de Fourier usual.

$L^1(G)$ es un álgebra de Banach con el producto de convolución y se cumple

$$(f * g)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

luego : $C \hat{G}$. conjunto

$$I(Y) = \{f \in L^1(G) \mid \hat{f}(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in Y\}$$

es un ideal cerrado de $L^1(G)$.

Si $I(Y)$ es un ideal cerrado de $L^1(G)$ se llama envoltura de $C \hat{G}$ al conjunto

$$Z(K) = \{\gamma \in \hat{G} \mid \hat{f}(\gamma) = 0 \quad \forall f \in K\}$$

Sea $J_0(Y)$ el conjunto de las $f \in L^1(G)$ tales que $\hat{f}(\gamma) = 0$ para toda γ en algún entorno de Y (el entorno puede variar con f). $J_0(Y)$ no tiene por qué ser un ideal cerrado, sea pues $J(Y)$ la clausura de $J_0(Y)$ en $L^1(G)$, entonces se tiene la inclusión

$$J(Y) \subset I(Y)$$

siendo $J(Y)$ el ideal cerrado más pequeño con $Z(K)=Y$, mientras que $I(Y)$ es el más grande con $Z(K) = Y$.

Es pues natural preguntarse si $I(Y) = J(Y)$ determina

.11 Definición Un subconjunto cerrado $Y \subset \hat{G}$ es un conjunto de síntesis espectral si $I(Y) = J(Y)$.

Son conjuntos de síntesis espectral, por ejemplo, los conjuntos finitos, el conjunto de Cantor, cada conjunto de \mathbb{R}^2 cuya frontera sea una unión finita de segmentos, etc.

Teorema (Schwartz)

La esfera unidad S^2 en \mathbb{R}^3 no es un conjunto de síntesis espectral para $L^1(\mathbb{R}^3)$

Demostración:

Sea $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ el conjunto de las funciones C^∞ con soporte compacto definidos en \mathbb{R}^3 . Al ser

$$E = \{ \hat{f} \mid f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3) \}$$

un subespacio denso de $L^1(\mathbb{R}^3)$, definimos el operador lineal

$$L(\hat{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f}{\partial x} d\sigma$$

para toda $f = f(x, y, z)$ de $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, siendo $d\sigma$ la medida de Lebesgue singular sobre la esfera S^2 .

Probaremos que

$$.13 \quad \|L(\hat{f})\| \leq 4\pi \|\hat{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}$$

luego es continuo sobre , tendrá una única extensión a $L^1(\mathbb{R}^3)$

Sea a clausura en $L^1(\mathbb{R}^3)$ de

$$\{\hat{f} \mid f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3) \mid f = \text{ en un entorno de } S^2\}$$

y sea la clausura de

$$\{\hat{f} \mid f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3) \mid f = \text{ en } S^2\}$$

Tanto como son ideales cerrados de $L^1(\mathbb{R}^3)$ con J C I Sin embargo la inclusión es estricta, puesto que $L(g) = 0$ para toda función de mientras que existen funciones de tales que $L(h) \neq 0$, basta con tomar por ejemplo como una apropiada $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ con $\hat{f} = h$

Para probar .13 observemos que

$$L(\hat{f}) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) d\sigma(x, y, z) = \int \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^\wedge(x, y, z) (\hat{d\sigma})(x, y, z) dx dy dz$$

$$-2\pi i \int x \hat{f}(x, y, z) (\hat{d\sigma})(x, y, z) dx dy dz$$

luego

$$|L(\hat{f})| \leq \sup_{x, y, z} |x (\hat{d\sigma})(x, y, z)| \|\hat{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}$$

y sólo nos resta ver que

$$.14 \quad \sup_{x,y,z} |\widehat{d\sigma}(x,y,z)| \leq 4$$

para ello calcularemos

$$\widehat{d\sigma}(x,y,z) = \int e^{-2\pi i(x\xi+y\eta+z\gamma)} d\sigma(\xi,\eta,\gamma)$$

como $\widehat{d\sigma}$ sólo depende de la distancia al origen

$(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, es suficiente con calcular $d\sigma$ en $(x,y,z) = (r,0,0)$, usando coordenadas esféricas

$$d\sigma(r,0,0) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{2\pi i r \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi = \frac{4\pi \sin r}{r}$$

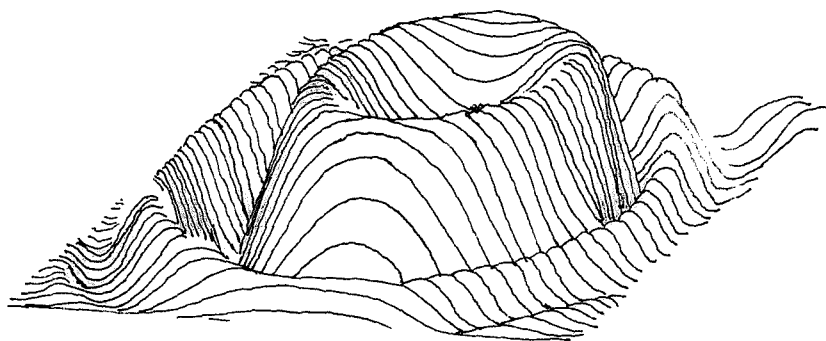
de donde obtenemos 1.14. ■

FUNCIONES RADIALES Y FUNCIONES DE BESSEL.-

Una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es radial si su valor sólo depende de la distancia al origen. Si f es radial escribiremos

$$.15 \quad f(x) = f(|x|) = f(r) \quad |x| = r$$

y de este modo, en cierta manera puede tratarse como una función de una variable en vez de una función de variables.



Por ejemplo, con la expresión del cambio a polares

$$.16 \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \int_0^\infty \left(\int_{S^{n-1}} f(rx') \, d\sigma(x') \right) r^{n-1} dr$$

$rx' = |x| \cdot \frac{x}{|x|}$

una función radial se integra sencillamente como

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = c_n \int_0^\infty f(r) r^{n-1} dr$$

Al conmutar la transformada de Fourier con rotaciones, si tomamos una función radial al ser ésta invariante frente a rotaciones resulta que su transformada de Fourier es también una función radial. Más precisamente, si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$.18 \quad \hat{f}(r) = 2\pi r^{-\frac{(n-2)}{2}} \int_0^\infty f(s) J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi rs) s^{n/2} ds$$

donde $J_{\frac{n-2}{2}}$ es la función de Bessel de orden $\frac{n-2}{2}$.

De esta forma, las funciones de Bessel juegan un importante papel en el análisis armónico y su conocimiento resulta vital para calcular ciertas transformadas y acotar operadores.

Las funciones de Bessel J_n pueden definirse así

1.19 Definición

$$J_n(t) = \frac{(t/2)^n}{\Gamma(\frac{2n+1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{its} (1-s^2)^{n-\frac{1}{2}} ds$$

$$-\frac{1}{2}$$

Para $n = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{2}$ (pasando al límite cuando $n \rightarrow -\frac{1}{2}$)
resultan simplemente

$$1.20 \quad J_{-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos t$$

$$1.21 \quad J_{\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t$$

Para $n \geq 0$ entero $J_n(t)$ son los coeficientes de Fourier
de una función sencilla

$$1.22 \quad e^{it \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t) e^{in\theta} \quad (\text{con } J_{-n} = (-1)^n J_n)$$

Expresiones más explícitas de $J_n(t)$, pueden obtenerse cuando n es un múltiplo entero de $\frac{1}{2}$ mediante la fórmula de recurrencia

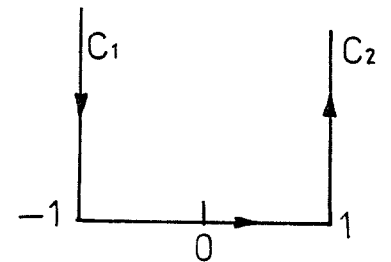
$$1.23 \quad \frac{d}{dt}(t^{-n} J_n(t)) = -t^{-n} J_{n+1}(t)$$

En todas las estimaciones con funciones de Bessel es necesario conocer el comportamiento asintótico, del que las fórmulas 1.20 y 1.21 dan ya una idea.

$$1.24 \quad J_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos \left(\sqrt{t} \left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) + O(t^{-3/2}) \quad \rightarrow$$

La demostración es muy sencilla mediante aplicación del teorema de Cauchy que permite expresar

$$\int_{-1}^1 e^{its} (1-s^2)^{n-\frac{1}{2}} ds = - \int_{C_1} - \int_{C_2} = -(I_1 + I_2)$$



estimando I_1, I_2 a partir del desarrollo de Taylor de $(y^2 + 2iy)^{n-\frac{1}{2}}$ en los respectivos integrandos.

Teniendo en cuenta más términos de tal desarrollo, se pueden obtener expresiones asintóticas tan precisas como se quiera de $J_n(t)$. Como consecuencia de 1.24

$$1.25 \quad J_n(t) = O(t^n) \quad \rightarrow 0$$

$$1.26 \quad J_n(t) = O(t^{-\frac{1}{2}}) \quad \rightarrow$$

La función $t^{-n} J_n(t)$, no sólo está acotada en el entorno del origen, sino que es una función entera cuando se permite a t tomar cualquier valor complejo.

Puede definirse $J_n(t)$ para $n = \mu + \nu$ con

$\operatorname{Re}(n) = \mu > -\frac{1}{2}$ y entonces 1.25 y 1.26, y una repetición de la demostración de 1.24 muestran que

$$1.27 \quad |J_{\mu+iv}(t)| \leq C e^{\pi|v|} t^{\mu} \quad < t <$$

$$1.28 \quad |J_{\mu+iv}(t)| \leq C e^{\pi|v|} t^{-\frac{1}{2}} \quad t \geq$$

acotaciones que son válidas uniformemente en μ cuando μ varía en un compacto dentro de $(-\frac{1}{2}, \infty)$.

Para las demostraciones basta tener en cuenta que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ es una función entera y que

$$1.29 \quad \left| \frac{1}{\Gamma(z)} \right| \leq C e^{\pi|\operatorname{Im} z|}$$

acotación que puede obtenerse de las fórmulas

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} z} \quad \Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$$

De la expresión 1.18 obtenemos

1.30 Proposición

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \frac{2n}{n+1}$ y f es radial, entonces $\hat{f}(r)$ es continua para $0 < r < \infty$.

Como consecuencia de ello podemos restringir $\hat{f}(r)$

a la circunferencia de radio r para todo $r > 0$. Si la condición es $1 \leq p < 4/3$ el teorema 1.40 de Zygmund demuestra que aunque f no sea radial, pero $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $1 \leq p < 4/3$, entonces existe $\hat{f}(x)$ en casi todo punto con $|x| = r$ para todo $r > 0$.

LA RESTRICCIÓN A LA ESFERA. LOS OPERADORES DE BOCHNER-RIESZ.

Sea $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ la esfera unidad de \mathbb{R}^n y $d\sigma$ la medida de Lebesgue inducida en S^{n-1} , $d\sigma$ es una medida de Borel radial y su transformada de Fourier es la función radial

$$\begin{aligned}\widehat{d\sigma}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\sigma(x) = \int_{S^{n-1}} e^{2\pi i \xi u} d\sigma(u) \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} \int_0^\pi e^{2\pi i |\xi| \cos \theta} (\sin \theta)^{\frac{n-2}{2}} d\theta \\ &= c_n \int_{-1}^1 e^{2\pi i |\xi| t} (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt = c_n |\xi|^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi |\xi|)\end{aligned}$$

por tanto, en virtud de 1.24

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = O(|\xi|^{-\frac{n-1}{2}}) \text{ cuando } |\xi| \rightarrow \infty \text{ luego si } n >$$

$$1.31 \quad \|d\sigma\|_p < \infty \quad \text{si y sólo si} \quad 1 \leq p < \frac{2n}{n+1}$$

Para $\alpha = 1$, se tiene $\widehat{d\sigma}(\xi) = \cos 2\pi|\xi|$, que ni siquiera cumple $\widehat{d\sigma}(\xi) \rightarrow 0$ cuando $|\xi| \rightarrow \infty$.

Observemos que de acuerdo con 1.10, 1.31 nos indica que una condición necesaria para que haya restricción a S^{n-1} es que $1 \leq p < \frac{2n}{n+1}$.

Con estas estimaciones, Stein demostró el siguiente resultado, que C. Fefferman utilizó para acotar los operadores de Bochner-Riesz:

1.32 Teorema (Stein, [10])

Sea $1 \leq p < \frac{4n}{3n+1}$, entonces existe C_p tal que

$$1.33 \quad \left(\int_{S^{n-1}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\sigma \right)^{1/2} \leq C_p \|f\|_p$$

para toda función $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Demostración

$$\text{Si } \tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$$

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\sigma &= \int_{S^{n-1}} (\widehat{f * \tilde{f}})^{\sim} d\sigma = \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{f * \tilde{f}}) \widehat{d\sigma} \leq \\ &\leq \|f * \tilde{f}\|_r \|\widehat{d\sigma}\|_r \leq \|\widehat{d\sigma}\|_r \|f\|_p^2 \end{aligned}$$

donde $\frac{1}{r} = \frac{2}{p} - 1$, para aplicar Hausdorff-Young, de manera que $\frac{1}{r'} = 2 - \frac{2}{p} < 2 - \frac{3n+1}{2n} = \frac{n-1}{2n}$, es decir

$$> \frac{2n}{n-1}$$

luego $C_p = \|(\hat{dQ})\|_{r'}^{1/2} < \infty$. ■

Dada una función $f \in L^p(T^n)$, le asociamos su serie de Fourier múltiple

$$f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \sim \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n = -\infty}^{+\infty} a_{k_1 k_2 \dots k_n} e^{2\pi i (k_1 \theta_1 + k_2 \theta_2 + \dots + k_n \theta_n)}$$

Para dar sentido a la convergencia de esta serie podemos tomar las sumas parciales esféricas

$$S_R f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \sum_{k_1^2 + \dots + k_n^2 \leq R^2} a_{k_1 k_2 \dots k_n} e^{2\pi i (k_1 \theta_1 + \dots + k_n \theta_n)}$$

y preguntarnos si $S_R f \rightarrow f$ cuando $R \rightarrow \infty$ en $L^p(T^n)$.

Esto último equivale a que S_R sea un operador acotado en $L^p(T^n)$ uniformemente en R , es decir, que $\|S_R f\|_p \leq C \|f\|_p$ con C independiente de R .

El análogo continuo del operador S_R es el operador T_R definido sobre funciones $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$(\hat{T_R f})(\xi) = m_R(\xi) \hat{f}(\xi)$$

donde $m_R(\xi) :$ si $|\xi| \leq R$ $m_R(\xi) = 0$ si $|\xi| > R$

Es decir

$$T_R f(x) = \int_{|\xi| \leq R} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

La pregunta sería ahora: Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ¿se cumple

$$1.34 \quad T_R f \longrightarrow$$

cuando $R \rightarrow \infty$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$

Esto equivale a que T_R sea un operador acotado uniformemente en R , en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y al ser

$$T_R = \delta_R \circ T_1 \circ \delta_{R^{-1}}$$

donde δ_R es la dilatación $\delta_R f(x) = f(Rx)$, resulta entonces que 1.34 equivale a que T_1 esté acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

De Leeuw probó que

$$\sup_R \|S_R\|_p = \|T_1\|_p$$

luego los problemas de convergencia para sumas esféricas de series e integrales de Fourier son equivalentes.

En dimensión ∞ la teoría es bastante satisfactoria, pues se tiene $T_R f \rightarrow f$ para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < \infty$, mientras que, quizás bastante sorprendentemente, si la dimensión es $n > 1$ Fefferman [12] demostró que T_1 no está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p \neq 2$. Por tanto la respuesta de 1.34 es negativa si $p \neq 2$ y hay convergencia si $p = 2$.

Para entender mejor el comportamiento de T_R se regulariza el multiplicador de la bola $m(\xi)$ y aparecen entonces los operadores de Bochner-Riesz:

1.35 Definición Dado $\lambda \geq 0$; se llaman operadores de Bochner-Riesz a los operadores T_λ definidos sobre funciones de \mathbb{R}^n por

$$(T_\lambda f)^\wedge(\xi) = m_\lambda(\xi) \hat{f}(\xi)$$

donde $m_\lambda(\xi) = (1 - |\xi|^2)_+^\lambda$, es decir, $m_\lambda(\xi) = (1 - |\xi|^2)^\lambda$ si $|\xi| \leq 1$ $m_\lambda(\xi) = 0$ en otro caso.

Si hubiéramos definido

$$(T_\lambda^R f)^\wedge(\xi) = m_\lambda^R(\xi) \hat{f}(\xi)$$

con $m_\lambda^R(\xi) = (1 - \frac{|\xi|^2}{R^2})_+^\lambda$, como antes resulta que $T_\lambda^R f \rightarrow f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si T_λ está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y esto equivale también a que $S_R^\lambda f \rightarrow f$ donde

S_R^λ es el análogo periódico, es decir

$$S_R^\lambda f(\theta) = \sum_{|u|^2 = u_1^2 + \dots + u_n^2 \leq R^2} \left(1 - \frac{|u|^2}{R^2}\right)_+^\lambda a_u e^{2\pi i u \theta}$$

siendo $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ un multiíndice,
 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$

$$a_u = \int_{\mathbb{T}^n} f(\theta) e^{-2\pi i u \theta} d\theta$$

$S_R^\lambda f(\theta)$ se llaman las medias de Riesz, ver [28], que en el caso de dimensión $n = 1$ son las medias de Cesaro.

Ahora la pregunta es entonces:

1.36 ¿ Para qué valores de λ es T_λ un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$?

En dimensión n se llama índice crítico a $\lambda = \frac{n-1}{2}$. Si $\lambda > \frac{n-1}{2}$ el núcleo de T_λ es integrable y la teoría clásica asegura que T_λ está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$ ([2]). Si $\lambda = \frac{n-1}{2}$ Stein [24] y Calderón-Zygmund [3] probaron que T_λ está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$.

Para λ más pequeño que el índice crítico se tienen hasta ahora los resultados que pasamos a exponer:

1.37 Teorema Sea $\lambda < \frac{n-1}{2}$

(a) (Herz [14]) T_λ no está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ si
 $p \notin (p_0(\lambda), p_0'(\lambda))$ donde $p_0'(\lambda)$ es el dual de
 $p_0(\lambda) = \frac{2n}{n+1+2\lambda}$

(b) (Fefferman [10]) si $\lambda > \frac{n-1}{4}$ T_λ está acotado en
 $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $p_0(\lambda) < p < p_0'(\lambda)$

(c) (Carleson-Sjölin [4], A.Córdoba [6], Hörmander [15])
En \mathbb{R}^2 T_λ está acotado en L^p si $\lambda' > 0$ y $p_0(\lambda)$
 $< p < p_0'(\lambda)$

(d) (Fefferman [12]) T_0 no está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ sal-
vo para $n = 1$ ó $p = 2$

(e) (Stein, P.Tomas [30]) T_λ está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ si
 $\lambda > \frac{n-1}{2(n+1)}$ y $p_0(\lambda) < p < p_0'(\lambda)$. ■

Como se ve, la respuesta es completamente satis-
 factoria para $n=1$, $n=2$. En dimensiones mayores, $n > 2$,
 los resultados (b) y (e) se han obtenido vía teoremas
 de restricción, de acuerdo con la siguiente observación de
 C.Fefferman [10]

1.38 Teorema

Supongamos que $\lambda > 0$ y $p_0(\lambda) < p < 2$. Supongamos también que se verifica

$$\|\hat{f}\|_{L^2(S^{n-1})} \leq C_p \|f\|_p$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ Entonces T_λ está acotado en
 $L^p(\mathbb{R}^n)$. ■

De este modo, obtenemos por ejemplo el apartado (e) del teorema 1.37 según el teorema 1.43 de P.Tomas .
1.38. Es el mejor resultado en dimensión $n \geq 3$ obtenido hasta el momento.

La importancia de los teoremas de restricción pa
ra este tipo de problemas se entienden mejor si escribimos

$$T_\lambda f(x) = \int_{|\xi| \leq 1} \hat{f}(\xi) (1 - |\xi|^2)^\lambda e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

ya que al aparecer las singularidades de $m_\lambda(\xi) = (1 - |\xi|^2)_+^\lambda$
cuando $|\xi| = 1$; el comportamiento de \hat{f} en S^{n-1} pue-
de ser esencial.

Observemos también que si escribimos el multipli-
cador de la bola, T_0 como convolución con su núcleo

$$T_0 f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y) dy$$

al ser

$$K(x) = (\chi_B)^\wedge(x) = \frac{e^{i|x|}}{|x|^{\frac{n+1}{2}}} + o(|x|^{-\frac{n+2}{2}}) \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty$$

resulta que

$$T_0 f(x) \sim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i|x-y|}}{|x-y|^{\frac{n+1}{2}}} f(y) dy$$

y si f es de soporte compacto, después de algunos cálculos llegamos a

$$T_0 f(x) \sim \frac{e^{i|x|}}{|x|^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \hat{f}\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty$$

Como se ve, el comportamiento de $T_0 f(x)$ en el infinito depende claramente de $\hat{f}\left(\frac{x}{|x|}\right)$

Fefferman [10] en 1969 prueba el siguiente resultado

1.39 Lema

Sea $f \in L^{4/3-\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$, entonces su transformada de Fourier \hat{f} verifica

$$\|\hat{f}\|_{L^{4/3}(S^1)} \leq C_\varepsilon \|f\|_{L^{4/3-\varepsilon}(\mathbb{R}^2)} \quad \blacksquare$$

Este lema junto con la acotación trivial

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1, \quad \text{nos da por interpolación}$$

$$\|\hat{f}\|_{L^2(S^1)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

para $1 \leq p < 6/5$, que mejora el teorema 1.32 en dimen-

si \acute{o} n $n = 2$ y nos da de paso una indicaci \acute{o} n de que el teorema 1.32 puede mejorarse mucho más.

En \acute{e} sta línea, A. Zygmund ([36], 1974) demuestra

1.40 Teorema

Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $1 \leq p < 4/3$

$$1.41 \quad \left(\int_{S^1} |\hat{f}(\xi)|^q d\sigma(\xi) \right)^{1/q} \leq C_{p,q} \|f\|_p$$

para todo $f \in S(\mathbb{R}^2)$ con $1 \leq q \leq \frac{1}{3} \frac{p}{p-1}$. ■

Con un cambio de variables en la expresi \acute{o} n 1.41 y teniendo en cuenta la homogeneidad de la transformada de Fourier, obtenemos

$$\left(\int_{|\xi|=R} |\hat{f}(\xi)|^q d\sigma(\xi) \right)^{1/q} \leq C_{p,q} R^{1/p'} \|f\|_p$$

que nos indica que si $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ con $1 \leq p < 4/3$ en tonces $\hat{f}(\xi)$ existe en casi todo punto ξ de la circunferencia de radio para todo $r > 0$, mientras que el teorema de Fubini en 1.16 nos daba s \acute{o} lo la existencia de $\hat{f}(\xi)$ en casi todo punto ξ de la circunferencia de radio para casi todo $r > 0$.

Zygmund prueba tambi \acute{e} n una versi \acute{o} n discreta del

teorema 1.40

1.42 Teorema

Sea $f \in L^p(S^1) = \sum_{\mu} a_{\mu} e^{2\pi i \mu \cdot \xi}$ su serie de Fourier asociada, entonces se cumple

$$\left(\sum_{|\mu|=r} |c_{\mu}|^q \right)^{1/q} \leq c_p \|f\|_p$$

para $1 \leq p \leq 4/3$ y $q = \frac{1}{2} p'$. ■

El teorema 1,40 es el mejor resultado posible de restricción en dimensión $n = 2$, la demostración de este hecho, conseguida primero por Fefferman y Stein usando armónicos esféricos, fue simplificada después por A. Knapp con un sencillo argumento de homogeneidad que clarifica también el papel que juega la curvatura en la restricción.

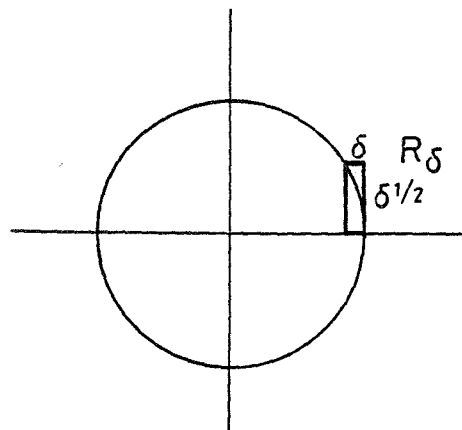
Veamos el argumento de Knapp en el caso de la circunferencia S^1 :

Queremos probar que la desigualdad

$$\|f\|_{L^q(S^1)} \leq C \|f\|_p$$

es falsa para ciertos índices p, q

Tomamos $(f_\delta)^\wedge$ que sea la función característica del rectángulo R_δ dibujado en la figura.



Si R_δ tiene dimensiones $\delta \times \delta^k$ entonces

$$\|f_\delta\|_p \cong c \delta^{\frac{k+1}{p'}}$$

Nos interesa minimizar $\|f_\delta\|_p$ y tomar $\hat{f}_\delta|_{S^1}$ lo más grande posible, luego tomaremos R_δ que interseque a la circunferencia un arco de longitud δ y que tenga área mínima.

Como la circunferencia es $y = \sqrt{1-x^2} \cong 1 - \frac{x^2}{2}$ cuando δ es pequeño, tomaremos $k = 2$ De este modo

$$\delta^{1/q} \leq c \delta^{3/p'}$$

para todo $\delta > 0$, haciendo $\delta \rightarrow 0$ nos aparece la condición necesaria $p' \geq 3q$. ■

El mismo razonamiento de A. Knapp puede utilizarse para encontrar condiciones necesarias de restricción a superficies en \mathbb{R}^n . Así aparece claro que cuanto más se curva una superficie mejor es la restricción de la transformada

de Fourier en ella. Un estudio de este tipo puede verse en [5]

En particular, el razonamiento de Knapp aplicado a la esfera S^{n-1} de \mathbb{R}^n da como condición necesaria $q \leq \frac{n-1}{n+1} p'$

El cono aparece como otra posible generalización de la circunferencia a dimensiones mayores, para el cono obtenemos $q \leq \frac{n-2}{n} p'$. Lo que nos indica, por ejemplo en \mathbb{R}^2 , que para resultados de restricción el cono es la generalización más natural de la circunferencia.

Para la esfera S^{n-1} si $q = 2$ la conjetura es entonces que la restricción es cierta para $1 \leq p \leq \frac{2(n+1)}{n+3}$, ésta ha sido probada:

1.43 Teorema

En \mathbb{R}^n existe (L^p, L^2) -restricción de la transformada de Fourier a la esfera unidad para $1 \leq p \leq \frac{2(n+1)}{n+3}$, es decir

$$\left(\int_{S^{n-1}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\sigma \right)^{1/2} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \blacksquare$$

La demostración de éste teorema fue conseguida primero por P. Tomas en 1975 que lo prueba para

$1 \leq p < \frac{2(n+1)}{n+3}$. Después, E. Stein llegó al extremo $p = \frac{2(n+1)}{n+3}$ usando una interpolación compleja, de manera parecida a como lo hacemos en el teorema 1.46 para la superficie no compacta del cono.

Posteriormente R. Strichartz [29], siguiendo la idea de los teoremas 1.43 y 1.46, probó la (L^p, L^2) -restricción para superficies cuadráticas más generales.

El que sea $q = 2$ es esencial en la demostración de estos hechos, pues utilizan el teorema de Plancherel y hasta el momento ningún resultado de restricción ha sido conseguido sin emplear de manera más o menos solapada este teorema.

El tratar superficies cuadráticas está condicionado porque para éstas sabemos calcular la transformada de Fourier de la medida de Lebesgue singular sobre ellas en términos de funciones de Bessel.

En cuanto a la restricción de la transformada de Fourier sobre curvas más generales que la circunferencia, basta mirar como se comporta en un entorno de cada punto, en el plano se tiene el resultado siguiente:

1.44 Teorema (P.Sjölin, [23], 1974)

Dada la curva $\gamma(t) = (t, t^k)$ $k \geq 2$, en el pla-

no \mathbb{R}^2 , en un entorno del origen se cumple

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\gamma)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

para $1 \leq q < \frac{p'}{k+1}$ si $p' > \max\{4, k+1\}$ ■

A. Ruiz, en su tesis, da una demostración geométrica de este último teorema y consigue llegar al extremo $q = \frac{p'}{k+1}$ (si $q > \frac{p'}{k+1}$ el argumento de Knapp prueba que no hay restricción):

1.45 Teorema

Dada la curva $\gamma(t) = (t, t^k)$, $k \geq 2$ en un entorno del origen se verifica

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\gamma)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

para $q = \frac{p'}{k+1}$ si $p' > 2k$. ■

Estos resultados son interesantes porque miden en cierto modo como cambia el comportamiento de la transformada de Fourier sobre curvas en puntos de curvatura nula, cuanto menos curvatura tenga la curva peor es la restricción de la transformada de Fourier.

La restricción sobre curvas en \mathbb{R}^3 ha sido estu-

diada también por E. Prestini [19] para curvas de curvatura y torsión positivas y por A. Ruiz para curvas más generales.

LA RESTRICCIÓN (L^p, L^2) A LA SUPERFICIE DEL CONO.-

Vamos a dar a continuación la demostración de A. Córdoba y E. Stein, no publicada, de la (L^p, L^2) -restricción a la superficie del cono. Para mayor simplicidad la haremos en \mathbb{R}^3 aunque el razonamiento es válido en \mathbb{R}^n .

Si parametrizamos el cono Σ como $z = f(x, y)$ siendo

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad z > 0$$

tomaremos en la medida $d\sigma = \frac{1}{2} \frac{dx dy}{z}$

1.46 Teorema

Dada la superficie de un cono en \mathbb{R}^3 , se tiene

$$\left(\int_{\Gamma} |\hat{f}(\xi)|^2 d\sigma \right)^{1/2} \leq C \|f\|_{L^{6/5}(\mathbb{R}^3)}$$

Demostración

Poniendo $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |\hat{f}(\xi)|^2 d\sigma &= \int_{\Gamma} \tilde{f}(\xi) \hat{f}(\xi) d\sigma = \int_{\mathbb{R}^3} (\tilde{f}(x) * f(x)) \hat{d\sigma}(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}(x) \cdot (f(x) * \hat{d\sigma}(x)) dx \leq \|f\|_p \|\hat{d\sigma} * f\|_p, \end{aligned}$$

Basta probar pues que $\|\hat{d\sigma} * f\|_{p'} \leq C \|f\|_p$ para $p = 6/5$. Aplicaremos el teorema de interpolación de Stein y seguiremos los cálculos de Gelfand y Shilov en [13]

Si la ecuación del cono es $x^2 + y^2 = z^2$ la medida singular $d\sigma$ es la distribución

$$d\sigma = \lim_{\alpha \rightarrow -1} \frac{(x^2 + y^2 - z^2)_+^\alpha}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\alpha+3/2)}$$

Para aplicar el teorema de interpolación de Stein consideramos $\hat{d\sigma}$ incluido en la familia de núcleos

$$k_\alpha(\xi) = \left(\frac{(x^2 + y^2 - z^2)_+^\alpha}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\alpha+3/2)} \right)^\wedge(\xi)$$

con lo que $\hat{d\sigma} = k_{-1}$ y queremos probar que $T_{-1} = k_{-1} * f$ es un operador acotado $L^p \longrightarrow L^{p'}$.

Los operadores $T_\alpha f = k_\alpha * f$ dependen analíticamente de α y encontraremos la acotación de T_{-1} por in-

terpolación entre $T_{-3/2+it}$ T_{0+it} .

Al ser

$$k_{\alpha}(x,y,z) = 2^{3+2\alpha} \pi^{1/2} \frac{1}{2i} \left\{ e^{-i(\frac{1}{2}+\alpha)\pi} (x^2+y^2-z^2-i0)^{-\alpha-3/2} \right. \\ \left. \cdot e^{i(\frac{1}{2}+\alpha)\pi} (x^2+y^2-z^2+i0)^{-\alpha-3/2} \right\}$$

es

$$|K_{-3/2+it}| \leq C e^{Mt} \quad C, M \text{ constantes}$$

luego $T_{-3/2+it}(f) = K_{-3/2+it} * f$ es un operador acotado

$$T_{-3/2+it} : L^1 \longrightarrow L^{\infty}$$

Por otro lado

$$\hat{K}_{it} = \frac{(x^2 + y^2 - z^2)_+^{it}}{\Gamma(it+1) \Gamma(it+3/2)}$$

es una función de L^{∞} $|\hat{K}_{it}(\cdot)| \leq C e^{Mt}$, por tanto

$$\|K_{it} * f\|_2 = \|\hat{K}_{it} \cdot \hat{f}\|_2 \leq C e^{Mt} \|\hat{f}\|_2 = C e^{Mt} \|f\|_2$$

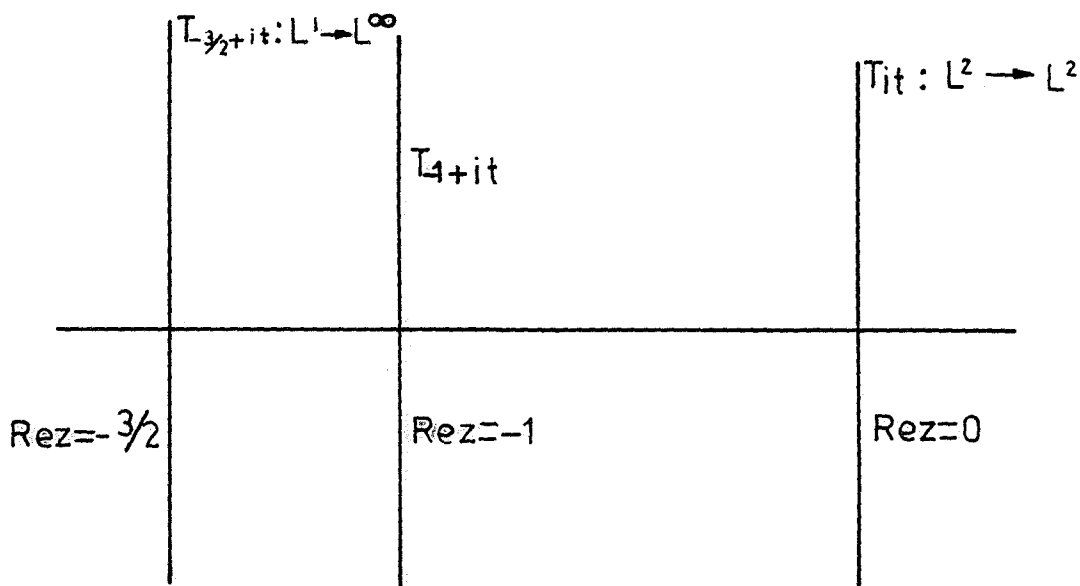
$$\text{luego } T_{it} : L^2 \longrightarrow L^2$$

T_{-1} estará entonces acotado $T_{-1} : L^p \longrightarrow L^{p'}$ con $p = \frac{6}{5}$,

pues

$$= (1-t) \cdot 0 + t(-3/2) \quad \text{da} \quad = 2/3 \quad \text{y con}$$

$$\text{éste} \quad \frac{1}{p} = (1-t) \frac{1}{2} + \frac{t}{1} \quad \text{es} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$



En \mathbb{R}^n saldría $p = \frac{2n}{n+2}$ y con argumentos parecidos a los que damos al comienzo del capítulo II puede verse que este es el mejor resultado posible de (L^p, L^2) -restricción. ■

TEOREMAS DE INTERPOLACION. -

Si tenemos un operador que esté acotado

$$T: L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{q_0}(\mathbb{R}^n) \quad T: L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{q_1}(\mathbb{R}^n)$$

podemos definir sobre toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p_0 \leq p \leq p_1$ pues tomando

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq 1 \\ 1 & \text{si } |f(x)| > 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = f(x) - f_1(x)$$

es $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ y $f_2 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ luego basta con definir $Tf = Tf_1 + Tf_2$.

Un teorema de interpolación nos dará la acotación de T sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$ en función de las acotaciones sobre L^{p_0} y L^{p_1}

Esta situación presenta varias generalizaciones y variantes pero siempre siguen esta filosofía general:
Sea T un operador lineal que aplique un espacio vectorial A en otro B , si A_0, A_1 son espacios de Banach contenidos en A y B_0, B_1 son espacios de Banach contenidos en B tales que T restringido a A_i es continuo $T: A_i \rightarrow B_i$ $i = 0, 1$. Entonces existen una infinidad de espacios "intermedios" A, B tales que $A_0 \subset A \subset A_1$, $B_0 \subset B \subset B_1$ tales que $T: A \rightarrow B$ es continuo.

En análisis de Fourier los más importantes y utilizados teoremas de interpolación son el teorema de interpolación de Riesz, el de Marcinkiewicz y el de interpola-

ción compleja de Stein, que enunciamos a continuación:

1.47 Definición Sean (M, μ) (N, ν) dos espacios de medida, diremos que un operador lineal es de tipo (p, q) si

$$\|Tf\|_{L^q(N)} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(M)}$$

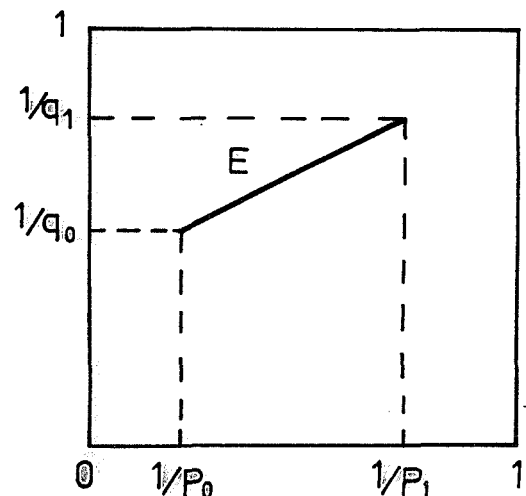
para toda función $f \in L^p(M)$ La menor constante $C_{p,q}$ que verifique la desigualdad se llama la (p, q) -norma de T

1.48 Teorema (de interpolación de M. Riesz)

Si el operador lineal es de tipos (p_i, q_i) con (p_i, q_i) -norma k_i , $i = 0, 1$, entonces T es de tipo (p_t, q_t) con (p_t, q_t) -norma $k_t \leq k_0^{1-t} k_1^t$ siendo

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1$$

Nótese que si representamos en el plano los puntos $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ si un operador es acotado $T: L^p \rightarrow L^q$ y formamos la envoltura convexa E de los $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$, el teorema anterior nos asegura que T es acotado $T: L^r \rightarrow L^s$ para todo $(\frac{1}{r}, \frac{1}{s}) \in E$.



Entre sus aplicaciones, están por ejemplo

1.49 Corolario (desigualdad de Hausdorff-Young)

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$$

$$\text{si } 1 \leq p \leq 2 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \blacksquare$$

1.50 Corolario (desigualdad de Young)

Sea la convolución

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) g(t) dt$$

$$\text{entonces } \|f * g\|_q \leq \|f\|_p \|g\|_r \quad \text{cuando } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}. \quad \blacksquare$$

1.51 Definición Si T manda $L^p(M)$ en $L^q(N)$ diremos que es subaditivo si

$$|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|$$

para casi todo : para todos $f, g \in L^p(M)$.

1.52 Definición Un operador subaditivo se dice que es de
tipo débil-(p,q) si

$$|\{x: |Tf(x)| > \alpha\}| \leq \left(\frac{C}{\alpha}\|f\|_p\right)^q$$

para toda función $f \in L^p(M)$ $|A|$ indica la medida de Lebesgue del conjunto A).

Es inmediato observar que tipo-(p,q) implica tipo débil-(p,q), el siguiente teorema es un refinamiento del anterior que es útil cuando de un operador sólo podemos decir que es de tipo débil o subaditivo, como por ejemplo la función maximal, la transformada de Hilbert etc.

1.53 Teorema (de interpolación de Marcinkiewicz)

Si es un operador subaditivo de tipo débil-(p_i, q_i) , con $1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$ para $i = 0, 1$ $q_0 \neq q_1$, entonces

$$\|Tf\|_{q_t} \leq C_t \|f\|_{p_t}$$

siendo $\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$ $\frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$ $0 < t < 1$

El teorema de interpolación de Riesz puede extenderse al caso en que los operadores varíen con los índices p,q de manera diferenciable. Supongamos que todo de la banda

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha \leq \operatorname{Re} z \leq \beta\}$$

tiene asociado un operador lineal T_z que mande funciones

simples de $L^1(M)$ en funciones medibles sobre N de tal modo que $(T_z f)g$ es integrable sobre N cuando f, g son funciones simples con $f \in L^1(M), g \in L^1(N)$.

Diremos que la familia $\{T_z\}$ es admisible si

$$z \longmapsto \phi(z) = \int_N (T_z f)g \, d\nu$$

es una función analítica en el interior de S , continua en S y existe una constante $a < \infty$ tal

$$e^{-a|y|} \log |\phi(z)|$$

está uniformemente acotada para $z = x + iy$ en S

1.54 Teorema (de interpolación de Stein)

Supongamos que $\{T_z\}$, $z \in S$, es una familia admisible de operadores lineales tales que

$$\|T_{\alpha+iy}\|_{q_0} \leq M_0(y) \|f\|_{p_0}$$

$$\|T_{\beta+iy}\|_{q_1} \leq M_1(y) \|f\|_{p_1}$$

para toda función simple $f \in L^1(M, \mu)$, con $1 \leq p_0, q_0 \leq \infty$, $1 \leq p_1, q_1 \leq \infty$

$$\sup_{-\infty < y < \infty} e^{-b|y|} \log M_j(y) \quad j = 0, 1$$

para algún $b < \dots$ entonces si $0 \leq t \leq 1$ existe una
constante M_t tal que

$$\|T_t f\|_{q_t} \leq M_t \|f\|_{p_t}$$

para toda función simple , con $\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$
 $\frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$. ■

INTEGRACIÓN FRACCIONARIA.-

Una conocida fórmula de Cauchy

$$f_n(x) = \int_0^x \int_0^{\xi_{n-1}} \dots \int_0^{\xi_1} f(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_{n-1}$$

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^x g(\xi) (x-\xi)^{n-1} d\xi$$

permite el cálculo de primitivas por medio de una inte
gral sencilla.

Podemos escribir la fórmula anterior como

$$f_n(x) = \frac{x_+^{n-1}}{(n-1)!} * f(x) = \frac{x_+^{n-1}}{\Gamma(n)} * f(x)$$

donde $x_+^{n-1} = x^{n-1}$ si $x \geq 0$ $x_+^{n-1} = 0$ si $x < 0$

Es natural generalizar la expresión anterior pa-

ra complejo poniendo

$$1.55 \quad I_{\lambda} f(x) = \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * f(x)$$

que tiene perfecto sentido si $\text{Re } \lambda > 0$. Para otros valores de λ , $\frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ debe entenderse como una distribución que tiene su soporte en $x \geq 0$

Es conocido que

$$\frac{x_+^{-N-1}}{\Gamma(-N)} = \delta^{(N)}(x) \quad \text{para } N = 0, 1, 2,$$

donde $\delta^{(N)}(x)$ es la N -ésima derivada de la delta de Dirac. De este modo

$$\frac{x_+^{-N-1}}{\Gamma(-N)} * f(x) = \delta^{(N)}(x) * f(x) = f^{(N)}(x)$$

Luego la expresión 1.55 nos da no sólo las integrales sucesivas de f sino también sus derivadas.

El operador I_{λ} se llama de integración fraccionaria (o bien de derivación fraccionaria).

Para extender 1.55 a dimensiones mayores que uno es conveniente manejar la transformada de Fourier.

En \mathbb{R}^n definimos $I_\beta f$ como

$$(I_\beta f)^\wedge(\xi) = (2\pi|\xi|)^{-\beta} \hat{f}(\xi)$$

que para $n =$ salvo una constante coincide con la anterior definición 1.55.

Si $0 < \beta < \infty$ $I_\beta(f)$ se llaman los potenciales de Riesz y tienen la expresión

$$I_\beta(f)(x) = \frac{1}{\gamma(\beta)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{\beta-n}} dy$$

$$\text{con } \gamma(\beta) = \pi^{n/2} 2^\beta \frac{\Gamma(\beta/2)}{\Gamma(n/2-\beta/2)}$$

Hardy-Littlewood probaron el siguiente:

1.56 Teorema (de integración fraccionaria)

Sea $0 < \beta < \infty$ $1 \leq p < q < \infty$, $\frac{1}{p} + \beta - \frac{1}{q} =$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{|x-y|^\beta} dy$$

entonces

(a) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ la integral que define $g(x)$ converge
absolutamente a.e. x

$$(b) \quad \text{Si } p > \quad \|g\|_q \leq C \|f\|_p$$

(c) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ la aplicación $f \longmapsto g = \hat{f}_\beta$ es de
tipo débil $-(1, q)$. \blacksquare

Posteriormente Sobolev generalizó el resultado a dimensión n para $0 < \beta < n$, aunque para nuestros propósitos nos interesa una versión discreta de 1.56

1.57 Teorema

Sea $0 < \beta < \frac{n}{p}$ $< p < q < \infty$, $\frac{1}{p} + \beta = 1 + \frac{1}{q}$,
entonces si

$$a_n = \sum_m \frac{b_m}{(|n-m| + 1)^\beta}$$

es

$$\left(\sum_n |a_n|^q \right)^{1/q} \leq C \left(\sum_n |b_n|^p \right)^{1/p}. \quad \blacksquare$$

EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE.-

Dado $\delta > 0$, la función

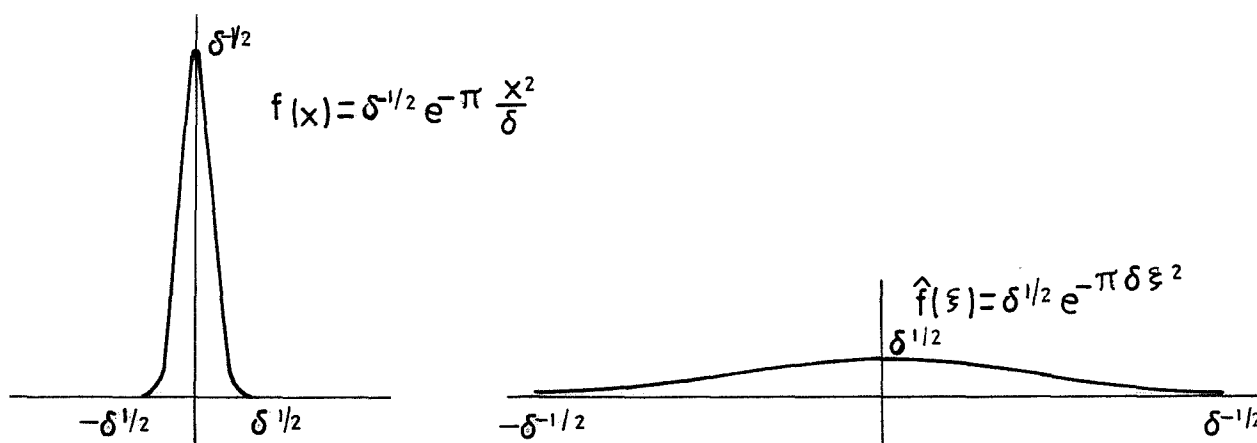
$$f(x) = \delta^{-1/2} e^{-\pi \frac{x^2}{\delta}}$$

en una primera aproximación, tiene su "soporte" esencialmente en el intervalo $[-\delta^{1/2}, \delta^{1/2}]$ y en él toma el valor $\delta^{-1/2}$, mientras que su

transformada de Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \delta^{1/2} e^{-\pi \delta \xi^2}$$

tiene su "soporte" esencialmente en $[\delta^{-1/2}, \delta^{-1/2}]$ y "vale" $\delta^{1/2}$ en él.



Observemos que si $\delta > 0$ es suficientemente pequeño este ejemplo nos indica que si f está concentrada en un punto, \hat{f} está muy dispersa. Este hecho es general y es una primera versión del principio de incertidumbre.

Una versión cuantitativa del mismo la da la desigualdad de Heisenberg:

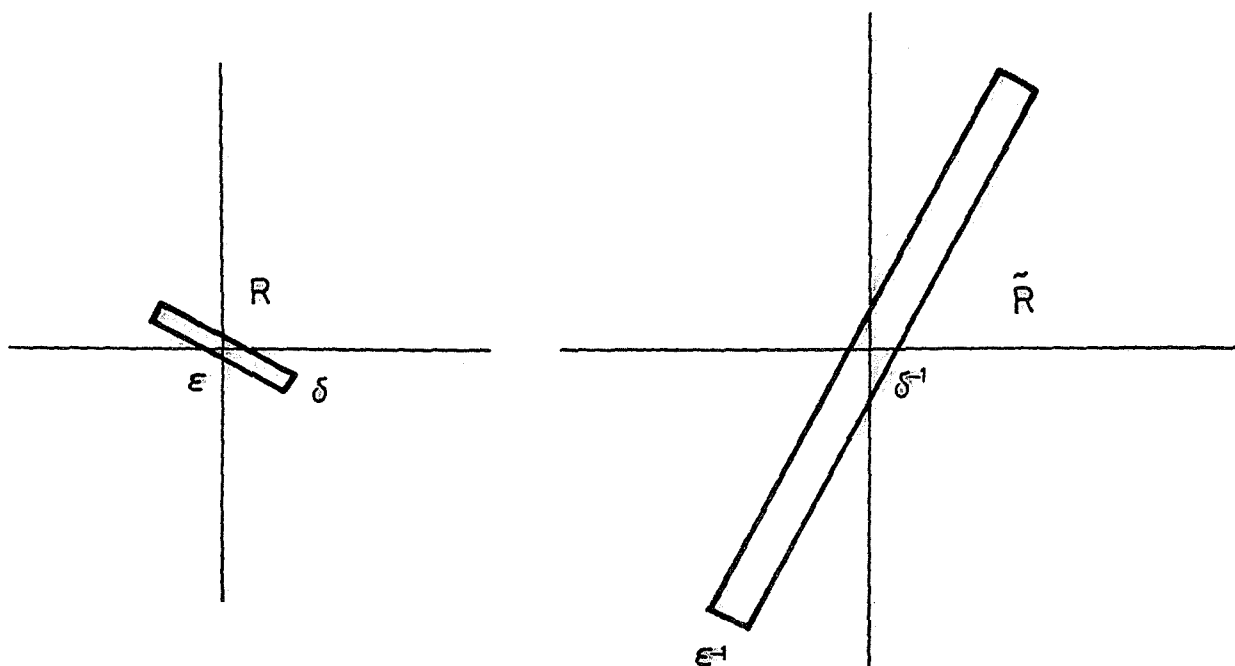
$$\text{Si } f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x - x_0|^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi - \xi_0|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \geq c_n \|f\|_2$$

que cuando se interpretan las variables x como "posiciones" y las ξ como "momentos" y las funciones son distribuciones de probabilidad, obtenemos la interpretación física del mismo.

En el análisis armónico geométrico el principio de incertidumbre nos sirve para localizar donde vive y cuánto vale la transformada de Fourier y nos indica que hay un equilibrio entre lo que podemos afinar a cada lado de la transformada de Fourier.

En \mathbb{R}^2 , por ejemplo, el principio de incertidumbre nos dice que si una función vive en un rectángulo centrado en el origen de dimensiones $\varepsilon \times \delta$ y vale uno en él, su transformada de Fourier vive entonces en el rectángulo dual \tilde{R} , que es el rectángulo centrado en el origen con la dirección de ε^{-1} y de dimensiones $\varepsilon^{-1} \times \delta^{-1}$ y vale $\varepsilon\delta$ en él.



Vamos a precisar la afirmación anterior:

Supongamos que es una función real C^∞ con

soporte compacto tal que

$$\begin{cases} \phi(x, y) > 0 & \text{si } |x| < \frac{1}{2}, \quad |y| < \frac{1}{2}, \\ \phi(x, y) = 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2} \text{ ó } |y| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

sea

$$\psi(x, y) = \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\delta}\right)$$

es pues una función adaptada al rectángulo de dimensiones $\varepsilon \times \delta$

$$\hat{\psi}(\xi, \eta) = \int \int \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\delta}\right) e^{-2\pi i(x\xi + y\eta)} dx dy$$

integrando por partes en la integral

$$\hat{\psi}(\xi, \eta) = \frac{-1}{\varepsilon^p (2\pi i \xi)^p} \int \int \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\delta}\right) e^{-2\pi i(x\xi + y\eta)} dx dy$$

$$\hat{\psi}(\xi, \eta) = \frac{-1}{\delta^q (2\pi i \eta)^q} \int \int \frac{\partial^q}{\partial y^q} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\delta}\right) e^{-2\pi i(x\xi + y\eta)} dx dy$$

por tanto

$$|\hat{\psi}(\xi, \eta)| \leq C_p \frac{\varepsilon \delta}{|\xi \varepsilon|^p} \quad p = 0, 1, 2$$

$$|\hat{\psi}(\xi, \eta)| \leq C_q \frac{\varepsilon \delta}{|\eta \delta|^q} \quad q = 0, 1, 2$$

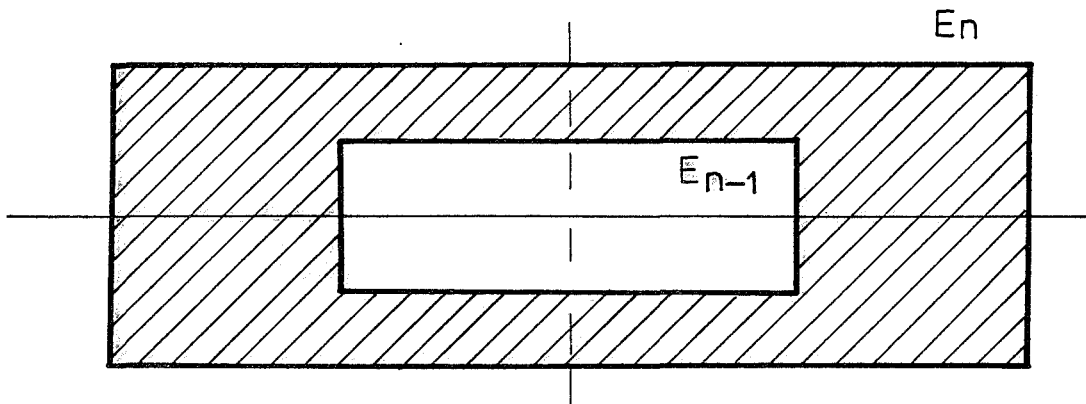
donde C_p es una constante que depende de las derivadas p -ésimas de

Llamando ahora

$$E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 2^n \varepsilon^{-1}, |y| \leq 2^n \delta^{-1}\}$$

Observemos que si $(\xi, \eta) \in E_n \setminus E_{n-1}$

$$|\hat{\psi}(\xi, \eta)| \leq c \frac{4}{2^n} \frac{1}{|E_n|}$$



por tanto

$$1.58 \quad |\hat{\psi}(\xi, \eta)| \leq c \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{|E_n|} \chi_{E_n}(\xi, \eta)$$

Al conmutar la transformada de Fourier con rotaciones, si partimos de un rectángulo R centrado en el origen y con una cierta dirección, la transformada de Fourier de una función ψ adaptada a R tendrá la misma expresión que 1.58 con los E_n con la misma dirección que R .

Y si el rectángulo R está centrado en un punto p del plano, su transformada de Fourier en módulo será la mis-

ma que tendría de estar centrado en el origen, pues difieren en una traslación y esto afecta sólo en un cambio de fase en la transformada de Fourier.

Las mismas consideraciones pueden hacerse en \mathbb{R}^n .

EL ANALISIS ARMONICO GEOMETRICO. LA TEORIA DE LITTLEWOOD-PALEY. LA FUNCION MAXIMAL. UN EJEMPLO.-

Por análisis armónico geométrico entendemos un conjunto de técnicas que permiten estudiar diferentes tipos de multiplicadores y operadores en donde aparece la transformada de Fourier. La idea consiste generalmente en descomponer el multiplicador y su núcleo correspondiente en diferentes piezas básicas de tal manera que sea más fácil estudiar cada una de ellas por separado.

Para acotar los diferentes trozos hay que tener en cuenta la lisura del multiplicador por un lado y la geometría del núcleo por otro, y existe un compromiso entre lo que podemos afinar a cada lado que viene dado por el principio de incertidumbre. Aparece después un operador positivo, la correspondiente función maximal, que controla todas las piezas de la descomposición, generalmente juntadas otra vez por algún tipo de ortogonalidad dada por una función de Littlewood-Paley.

El análisis armónico geométrico tiene la ventaja de que explica y aclara las estimaciones que se van obteniendo, habiendo tenido gran éxito, hasta el momento en el plano \mathbb{R}^2 .

La teoría de Littlewood-Paley

Dada la serie de Fourier

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n \theta}$$

la podemos descomponer en bloques diádicos

$$f(\theta) = \sum_{N=0}^{\infty} \Delta_N(\theta)$$

$$\text{donde } \Delta_0(\theta) = a_0, \quad \Delta_N(\theta) = \sum_{2^{N-1} \leq |n| < 2^N} a_n e^{2\pi i n \theta}$$

si $f \in L^2[0,1]$ los diferentes bloques son ortogonales, es decir

$$\|f\|_2 = \left\| \left(\sum_N |\Delta_N|^2 \right)^{1/2} \right\|_2$$

Littlewood y Paley, en la década de 1930, probaron que los bloques $\Delta_N(\theta)$ son "casi ortogonales" en norma

1.59 Teorema

Si $1 < p < \infty$, existen A_p, B_p constantes tales

$$A_p \|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_N |\Delta_N|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq B_p \|f\|_p. \quad \blacksquare$$

Este teorema nos dice, por ejemplo, que si cambiamos aleatoriamente el signo de cada bloque diádico no nos salimos de L^p .

Mientras que si $p \neq 2$ y si

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n \theta}$$

es la serie de Fourier de una función de L^p , y cambiamos aleatoriamente el signo de los coeficientes a_n , es decir, si tomamos $\varepsilon_n = \pm 1$ y escribimos

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_n a_n e^{2\pi i n \theta}$$

entonces con probabilidad uno la nueva serie obtenida no es una función de L^p .

Esto indica que el tamaño de una serie de Fourier de L^p no sólo depende del valor absoluto de sus coeficientes sino que también depende de delicadas relaciones entre sus fases y 1.59 es un primer paso en la difícil tarea de dar condiciones sobre los coeficientes para que una serie de Fourier sea de L^p .

Existe el análogo continuo de este teorema:

Si Δ es la descomposición en intervalos diádicos de \mathbb{R}^n S_ρ es el multiplicador

$$(S_\rho f)^\wedge(\xi) = \chi_\rho(\xi) \cdot \hat{f}(\xi)$$

se tiene el resultado siguiente:

1.60 Teorema

Si $1 < p < \infty$ existen constantes A_p, B_p tales
que

$$A_p \|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_{\rho \in \Delta} |S_\rho f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq B_p \|f\|_p. \quad \blacksquare$$

Consecuencias de estos teoremas son el teorema del multiplicador de Marcinkiewicz y teoremas tauberianos sobre la convergencia de las sumas parciales de series de Fourier.

Otros tipos de expresiones cuadráticas de una función f , $g(f)$, se encuentran en distintos contextos y aplicaciones y el estudio de tales funciones cuadrado es lo que actualmente se denomina la teoría de Littlewood-Paley.

En el análisis armónico geométrico una función suele ser una expresión que da una casi ortogonalidad entre

las piezas de una descomposición y sirve para poder pegarlas todas juntas. Vamos a dar una de éstas:

En \mathbb{R}^n sea $\mathcal{L} = \{Q_\nu\}$ una familia de paralelepípedos congruentes, es decir, son trasladados de uno fijo con interiores disjuntos y cuya unión es \mathbb{R}^n . Sea

$$g(f)(x) = \left(\sum_{\nu} |P_{\nu} f(x)|^2 \right)^{1/2}$$

definimos el operador P_{ν} como

$$(P_{\nu} f)^{\wedge}(\xi) = \chi_{Q_{\nu}}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi)$$

1.61 Teorema

Si $w \geq 0$ es una función medible

$$\int_{\mathbb{R}^n} (g(f)(x))^2 w(x) dx \leq c_s \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 A_s w(x) dx$$

donde $s > 1$, $A_s w(x) = [(w^s)^*(x)]^{1/s}$ y indica la función maximal fuerte. ■

Esta desigualdad con pesos da como consecuencia el siguiente:

1.61 Corolario

$$\left\| \left(\sum_{\nu} |P_{\nu} f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq c_p \|f\|_p \quad 2 \leq p < \infty \quad \blacksquare$$

b) La función maximal

La función maximal es un operador positivo que controla todas las piezas de la descomposición, casi siempre por un argumento de dualidad que nos da las estimaciones deseadas a partir de las propiedades de cubrimiento de las correspondientes familias de rectángulos de \mathbb{R}^n .

En general, cada multiplicador tendrá su correspondiente función maximal según sea la geometría de sus singularidades. Esto no es más que extender la filosofía de la teoría de Calderón-Zygmund de que la función maximal de Hardy-Littlewood controla las integrales singulares.

Para el multiplicador de Bochner-Riesz, se utiliza por ejemplo, la siguiente función maximal:

Dado $N \geq 1$ un número real se considera la familia \mathcal{R}_N de rectángulos en \mathbb{R}^2 de excentricidad N , es decir, rectángulos de dimensiones a, aN y dirección arbitraria. Dada una función localmente integrable f su función maximal es por definición

$$Mf(x) = \sup_{x \in R \in \mathcal{R}_N} \frac{1}{|R|} \int_R |f(t)| dt$$

1.62 Teorema

Existe una constante independiente de n tal

$$\|Mf\|_2 \leq C(\log 2N)^{1/2} \|f\|_2$$

para toda función $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ **■**

Un ejemplo

Para precisar un poco todo lo esbozado anteriormente vamos a trabajar una situación concreta:

Dada la circunferencia unidad S^1 tomamos un anillo C_δ de anchura δ que la contenga y dividimos el anillo en $[2\pi\delta^{-1/2}]$ rectángulitos de dimensiones $\delta \times \delta^{1/2}$ adaptados a la circunferencia.

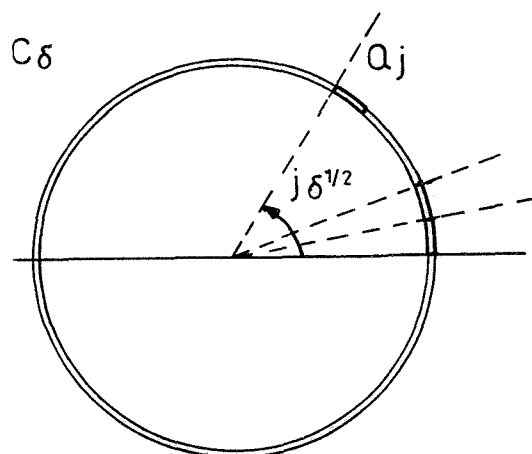
En coordenadas polares

$$C_\delta = \{(r, \theta) \mid 1 - \frac{\delta}{2} \leq r \leq 1 + \frac{\delta}{2}\}$$

Sea Q_j el rectángulo en la dirección $j\delta^{1/2}$

$$Q_j = \{(r, \theta) \mid (r, \theta) \in C_\delta, (j-1)\delta^{1/2} \leq \theta \leq j\delta^{1/2}\}$$

$$j = 1, 2, \dots, \delta^{-1/2}$$



y sea ψ_j la función característica de Q_j .

1.63 Teorema

Existe una constante independiente de δ tal

$$\left\| \sum_j \hat{\psi}_j \right\|_4 \leq c \delta^{3/4} |\log \delta|^{1/4} \left\| \sum_j \psi_j \right\|_4$$

Demostración

Para que el razonamiento geométrico funcione vamos a suponer que tomamos sólo los ψ_j que estén en el primer cuadrante, que no supone pérdida de generalidad pues sólo afecta en una nueva constante la desigualdad obtenida.

El primer paso será obtener la relación de ortogonalidad

$$\| \sum_j \hat{\psi}_j \|_4 \cong \| (\sum_j |\hat{\psi}_j|^2)^{1/2} \|_4$$

que es cierta, pues por Plancherel

$$\begin{aligned} \| \sum_j \hat{\psi}_j \|_4^4 &= \int_{\mathbb{R}^2} |(\sum_j \hat{\psi}_j(\xi)) \cdot (\sum_k \hat{\psi}_k(\xi))|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\sum_{j,k} \psi_j * \psi_k(x)|^2 dx = \\ &= \sum_{j,k} \sum_{\ell,m} \int_{\mathbb{R}^2} (\psi_j * \psi_k)(x) \cdot (\psi_\ell * \psi_m)(x) dx \end{aligned}$$

pero ahora por la curvatura de la circunferencia

$$\psi_j * \psi_k \cdot \psi_\ell * \psi_m = 0$$

excepto si $j = \ell, k = m$ o $j = m, k = \ell$

luego queda

$$\begin{aligned} \| \sum_j \hat{\psi}_j \|_4^4 &= \sum_{j,k} \int_{\mathbb{R}^2} (\psi_j * \psi_k)(x) (\psi_j * \psi_k)(x) dx = \\ &= \sum_{j,k} \int_{\mathbb{R}^2} |\psi_j * \psi_k(x)|^2 dx = \sum_{j,k} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}_j \cdot \hat{\psi}_k|^2 d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (\sum_j |\hat{\psi}_j|^2)^2 d\xi = \| (\sum_j |\hat{\psi}_j|^2)^{1/2} \|_4^4 \end{aligned}$$

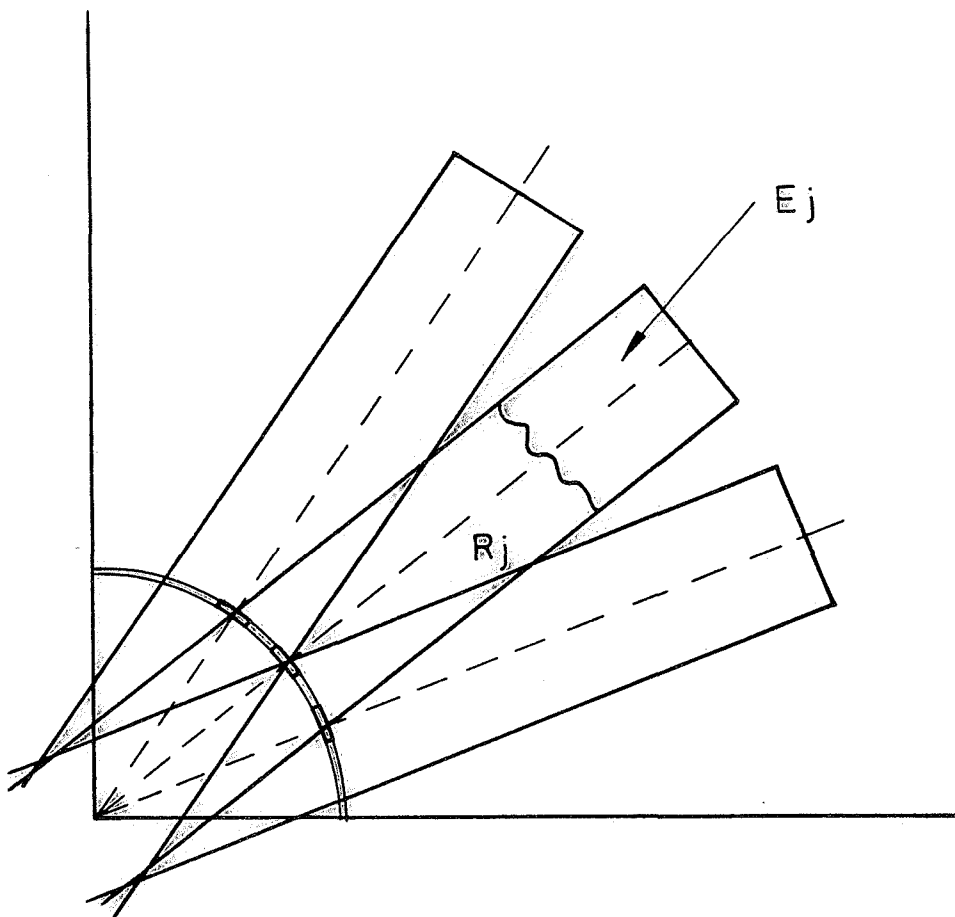
Observemos ahora que por el principio de incertidumbre, en una primera aproximación, $\hat{\psi}_j$ tienen su soporte en el rectángulo dual de Q_j . El rectángulo dual de Q_j ,

R_j , es un rectángulo de dimensiones $\delta^{-1} \times \delta^{-1/2}$ centrado en el origen y con la dirección radial $j\delta^{1/2}$, $\hat{\psi}_j$ toma el valor $|Q_j| = \delta^{3/2}$ en R_j .

Luego

$$1.64 \quad \left\| \left(\sum_j |\hat{\psi}_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_4^4 = \int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_j \delta^3 \chi_{R_j}(x) \right|^2 dx :$$

$$= \delta^6 \int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_j \chi_{R_j}(x) \right|^2 dx =$$



La situación geométrica ya sugiere que habrá que utilizar el operador maximal asociado a rectángulos de excentricidad $N = \delta^{-1/2}$ y dirección arbitraria para controlar la descomposición.

Observemos que si E_j es la parte exterior del rectángulo R_j , como en la figura, tal que

$$|E_j| \geq \frac{1}{2} |R_j|$$

y definimos el operador lineal

$$Tf(x) = \sum_j \frac{1}{|R_j|} \int_{R_j} f(y) dy \cdot \chi_{E_j}(x)$$

resulta que

$$|Tf(x)| \leq M(|f|)(x)$$

y por tanto

$$\|T\|_{L^2} \leq C(\log_2 \delta^{-1/2})^{1/2} \leq C|\log \delta|^{1/2}$$

pero el operador adjunto de es

$$T^*g(x) = \sum_j \frac{1}{|R_j|} \int_{E_j} g(y) dy \cdot \chi_{R_j}(x)$$

como se comprueba fácilmente y

$$T^*(\chi_{UR_j}) \geq \frac{1}{2} \sum_j \chi_{R_j}$$

por tanto

$$I \leq \delta^6 \int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_j \chi_{R_j}(x) \right|^2 dx \leq \delta^6 \left\| T^*(\chi_{\cup R_j}) \right\|_2^2 \leq \\ \leq c \delta^6 |\log \delta| \left| \cup_j R_j \right|$$

$$\text{pero } \left| \cup_j R_j \right| \leq \delta^{-2} \quad \left\| \sum_j \psi_j \right\|_4^4 = \delta$$

luego hemos probado

$$\left\| \sum_j \hat{\psi}_j \right\|_4 \leq c \delta^{3/4} |\log \delta|^{1/4} \left\| \sum_j \psi_j \right\|_4. \quad \blacksquare$$

Tomando $\sum_j a_j \hat{\psi}_j$ y evaluando directamente 1.64
obtendríamos

$$\left\| \sum_j a_j \hat{\psi}_j \right\|_4 \leq c \delta^{3/4} |\log \delta|^{1/4} \left\| \sum_j a_j \psi_j \right\|_4$$

que es lo que prueba W. Tomas en [32] siguiendo un camino
diferente, parecido al que utilizamos en el capítulo III
donde obtenemos un resultado análogo para la superficie del
cono.

C A P I T U L O I I

Sea Σ la superficie de un cono en \mathbb{R}^3 , en este capítulo estudiaremos la desigualdad de restricción

$$2.1 \quad \left(\int_{\Sigma} |\hat{f}(\xi)|^q d\sigma(\xi) \right)^{1/q} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

¿Para qué valores de p, q es posible una estimación de este tipo?

Tomando como $d\sigma$ la medida de Lebesgue sobre Σ que tenga siempre su soporte en un mismo compacto, con el argumento de homogeneidad de Knapp (Ver pág. 39) nos aparece la condición necesaria $q \leq p'/3$.

Sin embargo, fijados los índices p, q , la medida $d\sigma(\xi)$ sobre Σ deberá tener una homogeneidad que dependerá de p, q , distinta en principio de la que tiene la medida de Lebesgue. Homogeneidad que le viene impuesta para compensar en cierto modo la que tiene la transformada de Fourier.

Para precisar los cálculos podemos suponer, sin perder ninguna generalidad como se ve en las demostraciones, que Σ es la superficie parametrizada por

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = r$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi, r > 0$

En el teorema 2.5 demostramos 2.1 siendo $q = p'/3$,
 $1 \leq p < 4/3$ $d\sigma$ la medida

$$d\sigma(\xi) = dr d\theta \quad \text{si} \quad \xi = (r, \theta)$$

Obsérvese que la medida de Lebesgue sobre \mathbb{R}^2 sería $d\mu(\xi) = r dr d\theta$ y que ambas son equivalentes en un trozo compacto.

En la proposición 2.25 tratamos el caso
 $1 \leq q \leq p'/3$, en el que también se cumple la restricción
 2.1, pero donde hay que tomar la medida

$$d\sigma(\xi) = r^\alpha dr d\theta \quad \alpha = \frac{3q}{p'} -$$

Calculando la transformada de Fourier $\hat{d\sigma}$ de la medida singular sobre el cono encontraríamos valores de $\hat{d\sigma}$ necesarios para 2.1, tal como hacíamos en la pág.30 para las esferas. En el lema 2.4 utilizamos un argumento geométrico parecido al de [18] y probamos que 2.1 es falsa si $p > 4/3$.

Si $p = 4/3$ tampoco se cumple la desigualdad 2.1, pues ésta da como consecuencia el teorema 1.40 de Zygmund y éste no se cumple con $p = 4/3$. En el lema 3.14 probamos que 2.1 es falsa si $p = 4/3$ y damos además una estimación cuantitativa del mismo hecho.

En los Lemas 2.2, 2.3 y el teorema 2.5 que exponemos a continuación, tomaremos sobre \mathbb{R}^3 la medida

$$d\sigma(\xi) = dr d\theta$$

2.2 Lema

Una condición necesaria para que se verifique la desigualdad 2.1 es que $\frac{1}{q} = 3 \left[1 - \frac{1}{p} \right]$.

Demostración

Supongamos que toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ cumple

$$2.3 \quad \|\hat{f}\|_{L^q(\Gamma, d\sigma)} \leq C \|f\|_p$$

Fijada $a > 0$, sea

$$g(x) = (\delta_a f)(x) = f(ax) \quad a > 0$$

está en $L^p(\mathbb{R}^3)$ puesto que

$$\begin{aligned} \|g\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} |g(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(ax)|^p dx \right)^{1/p} = \\ &= a^{-3/p} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(y)|^p dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora que $\hat{g}(\xi) = a^{-3} \hat{f}(\xi/a)$

será

$$\|\hat{g}\|_{L^q(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |\hat{g}(\xi)|^q d\sigma(\xi) \right)^{1/q} = a^{-3} \left(\int_{\Gamma} |\hat{f}(\xi/a)|^q d\sigma(\xi) \right)^{1/q}$$

hacemos el cambio de variable $\xi = at$, luego $d\sigma(\xi) = ad\sigma(t)$
y queda

$$\begin{aligned} \|\hat{g}\|_{L^q(\Gamma)} &= a^{-3} a^{1/q} \left(\int_{\Gamma} |\hat{f}(t)|^q d\sigma(t) \right)^{1/q} \leq C a^{-3+\frac{1}{q}} \|f\|_p = \\ &C a^{-3+\frac{1}{q}+\frac{3}{p}} \|g\|_p \end{aligned}$$

luego si \quad tiene que cumplir 2.3 para todo $a > 0$ será

$$3 + \frac{1}{q} + \frac{3}{p} = 0$$

es decir

$$\frac{1}{q} = 3 \left[1 - \frac{1}{p} \right] . \quad \blacksquare$$

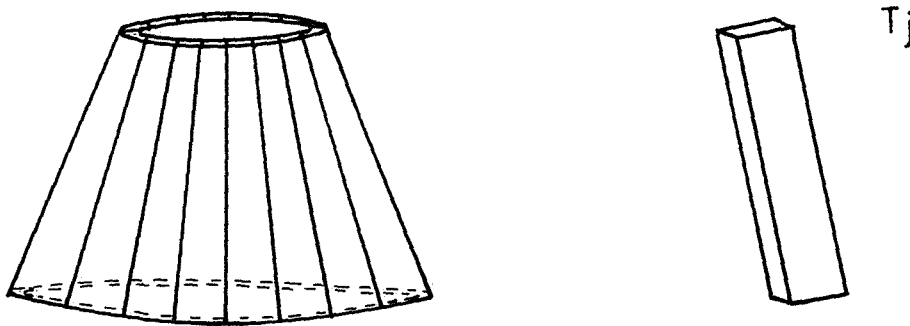
2.4 Lema

Un resultado de restricción como 2.1 sólo puede ser cierto si $p' \geq 4$.

Demostración

Vamos a tomar el tronco de cono Γ_0 formado por

todos los puntos de Γ_0 que están a una altura z con $1 \leq z \leq 2$. Dividimos ahora Γ_0 en $[2\pi\delta^{-1/2}]$ bandas verticales de anchura $\delta^{1/2}$ y metemos cada una de estas bandas en un bloque T_j de dimensiones $\delta^{1/2} \times \delta^{1/2} \times \delta$ adaptado a la superficie del cono tal como aparece en la figura



Aparecen así los $[2\pi\delta^{-1/2}]$ bloques

$$T_j \quad j = 1, 2, \dots, [2\pi\delta^{-1/2}].$$

Si $\hat{\phi}_j$ es una función de la clase de Schwartz en \mathbb{R}^3 cuyo soporte sea esencialmente T_j y tal que $\hat{\phi}_j = 1$ en casi todo su soporte, su transformada de Fourier $\hat{\hat{\phi}}_j$, por el principio de incertidumbre, tendrá su soporte esen-

cialmente en el rectángulo dual de T_j, S_j .

Con la traslación conveniente x_j podemos suponer que los $\delta^{-1/2}$ bloques S_j tienen sus soportes prácticamente disjuntos, y como

$$(\tau_{x_j} \phi_j)^\wedge(t) = e^{-2\pi i x_j \cdot t} \hat{\phi}_j(t)$$

si tomamos $f(t) = \sum_j (\tau_{x_j} \phi_j)^\wedge(t) = \sum_j e^{-2\pi i x_j \cdot t} \hat{\phi}_j(t)$

será $\|\hat{f}\|_{L^q(\Gamma)} \geq c$

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \left\| \sum_j \tau_{x_j} \phi_j \right\|_p^p \leq c \sum_j \|\tau_{x_j} \phi_j\|_p^p \\ &: \sum_{j=1}^{\delta^{-1/2}} \delta^{-(1+\frac{1}{2})} \delta^{(1+\frac{1}{2})p} = \delta^{-\frac{1}{2}} \delta^{\frac{3}{2}(p-1)} \end{aligned}$$

luego si se cumple 2.1 será

$$c \leq \delta^{-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}(p-1)}$$

haciendo tender hacia cero aparece pues la condición

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}(p-1) \leq$$

es decir $p \leq 4/3$, o lo que es lo mismo, $p' \geq 4$ ■

2.5 Teorema

Dada una función $f \in S(\mathbb{R}^3)$, se cumple

$$\left(\int_{\Gamma} |\hat{f}(\xi)|^q d\sigma(\xi) \right)^{1/q} \leq c_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

con $\frac{1}{q} = 3 \left[1 - \frac{1}{p} \right], \quad 1 \leq p < 4/3$

Demostración

Sin perder generalidad podemos suponer que el cono tiene un vértice en el origen y que se genera por revolución de la semirecta $z = x, z \geq 0$ alrededor del eje. De este modo tendrá por ecuación cartesiana

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad z \geq 0$$

y podemos parametrizarlo con

$$z = r \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

Para demostrar 2.5 es suficiente con tomar sólo el primer cuadrante $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, ya que cada cuadrante se trataría igual y esto sólo afecta en una nueva constante $c_{p,q}$ en 2.5

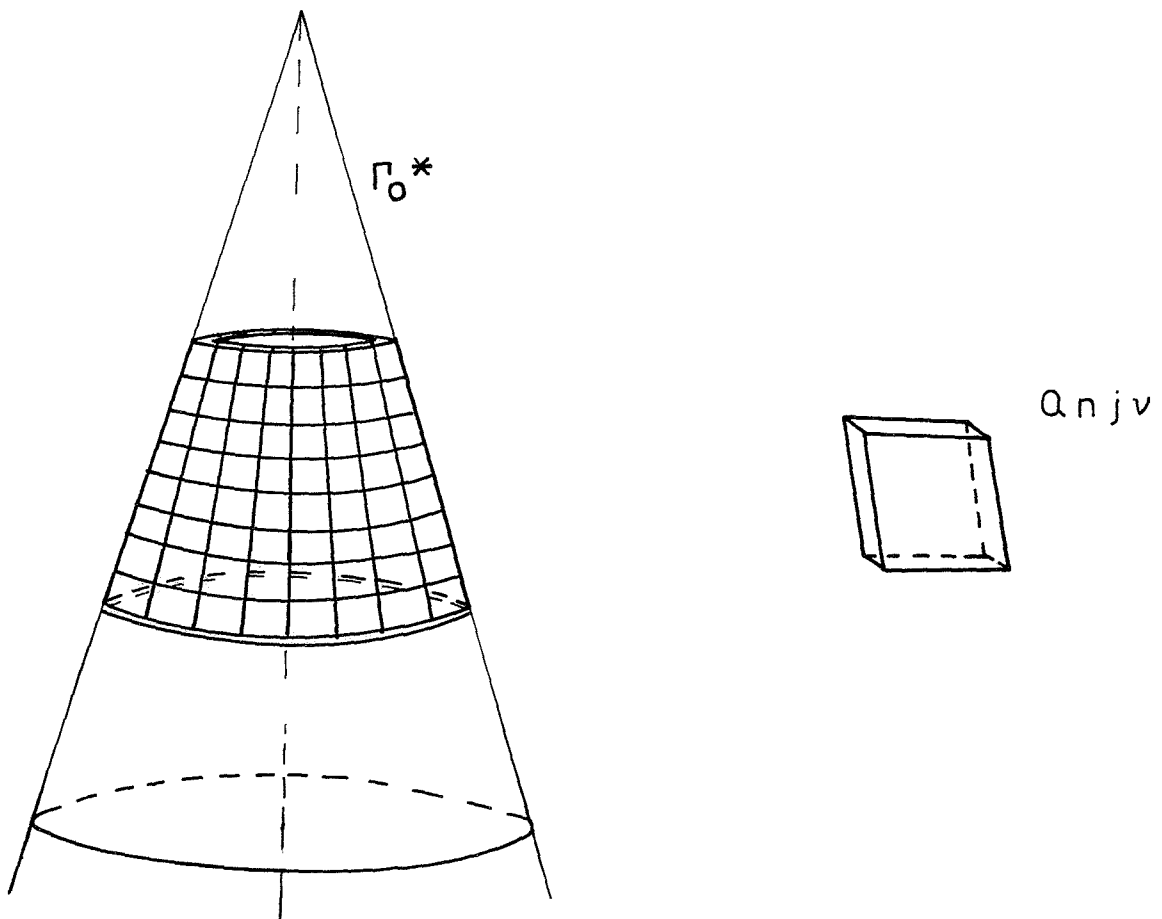
Dividimos el cono en trozos diádicos $\Gamma_n, n \in \mathbb{Z}$. Γ_n es el tronco de cono diádico que corresponde a una al

tura $2^n \leq z \leq 2^{n+1}$

Dado $\delta > 0$ suficientemente pequeño, ensanchamos Γ_0 en dirección radial un espesor δr , de tal manera que obtendremos el tronco de cono "grueso" Γ_0^* , que a una altura con $1 \leq z \leq 2$ será la corona

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad z(1 - \frac{\delta}{2}) \leq r \leq z(1 + \frac{\delta}{2})$$

Dividimos ahora Γ_0^* en $\delta^{-1/2} \times \delta^{-1/2}$ losas Q_{0jv} , Q_{0jv} será la losa de dimensiones $\delta \times \delta^{1/2} \times \delta^{1/2}$



formada por los puntos de Γ_0^* que estén a una altura

$$j\delta^{1/2} \leq z \leq 1 + (j+1)\delta^{1/2}$$

y con una dirección angular

$$\delta^{1/2} u \leq \theta \leq \delta^{1/2} (u+1)$$

Una vez obtenida esta descomposición de Γ_0^* , obtenemos Γ_n^* y una división análoga de Γ_n^* en losas por homogeneidad. De éste modo, Γ_n^* quedará dividido en $\delta^{-1/2} \times \delta^{-1/2}$ trozos Q_{njv} , siendo Q_{njv} la losa de dimensiones $2^n \delta \times 2^n \delta^{1/2} \times 2^n \delta^{1/2}$ que está a una altura

$$2^n + 2^n j \delta^{1/2} \leq z \leq 2^n + 2^n (j+1) \delta^{1/2}$$

y con una dirección angular

$$\delta^{1/2} u \leq \theta \leq \delta^{1/2} (u+1)$$

Pongamos $\Gamma^* = \bigcup_n \Gamma_n^*$ y llamemos ϕ_{njv} a la función característica de Q_{njv} . Para probar 2.6 es suficiente con probarlo para funciones que sean constantes en cada losa, luego si a_{njv} es el valor que toma ϕ en Q_{njv} basta con que

$$2.7 \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} \int_{\Gamma^*} \left| \sum_{njv} \frac{a_{njv}}{2^{2n/q}} \hat{\phi}_{njv}(\xi) \right|^q d\xi \right)^{1/q} \leq$$

$$C \left(\sum_{njv} |a_{njv}|^p \delta^2 2^{3n} \right)^{1/p}$$

y por dualidad será suficiente que

$$2.8 \quad \left\| \sum_{nj\cup} \frac{a_{nj\cup}}{2^{2n/q}} \hat{\phi}_{nj\cup} \right\|_{p'} \leq C \delta^{1/q} \left\| \sum_{nj\cup} a_{nj\cup} \phi_{nj\cup} \right\|_q,$$

para δ suficientemente pequeño y siendo p', q' los exponentes duales de p, q respectivamente.

Al ser $p' > 4$, aplicando el teorema de Hausdorff-Young con $\frac{1}{s} + \frac{2}{p'} = 1$ será

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \sum_{nj\cup} \frac{a_{nj\cup}}{2^{2n/q}} \hat{\phi}_{nj\cup}(\xi) \right|^{p'} d\xi \right)^{1/p'} \\ & \left(\int \left| \sum_{nm} \sum_{jk} \sum_{\cup\mu} \frac{a_{nj\cup}}{2^{2n/q}} \frac{a_{mk\mu}}{2^{2m/q}} \hat{\phi}_{nj\cup}(\xi) \cdot \hat{\phi}_{mk\mu}(\xi) \right|^{p'/2} d\xi \right)^{\frac{2}{p'} \cdot \frac{1}{2}} \leq \\ & \left(\int \left| \sum_{nm} \sum_{jk} \sum_{\cup\mu} \frac{a_{nj\cup}}{2^{2n/q}} \frac{a_{mk\mu}}{2^{2m/q}} \phi_{nj\cup} * \phi_{mk\mu}(x) \right|^s dx \right)^{\frac{1}{2s}} \\ & C \left(\int \left| \sum_{m \leq n} \sum_{jk} \sum_{\cup\mu} \frac{a_{nj\cup}}{2^{2n/q}} \frac{a_{mk\mu}}{2^{2m/q}} \phi_{nj\cup} * \phi_{mk\mu}(x) \right|^s dx \right)^{\frac{1}{2s}} \\ & \leq C \left(\sum_{r \geq 0} \left(\int \left| \sum_n \sum_{jk} \sum_{\cup\mu} \frac{a_{nj\cup}}{2^{2n/q}} \frac{a_{n-r,k,\mu}}{2^{2(n-r)/q}} \phi_{nj\cup} * \phi_{n-r,k,\mu}(x) \right|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & C \left(\sum_{(a)} + \sum_{(b)} + \sum_{(c)} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

donde hemos descompuesto la suma $\sum_{r \geq 0}$ en tres trozos, en

(a) tomaremos $r \geq |\log_2 \delta|$, es decir, tomamos los pares

(m,n) con $m \leq n$ y $\frac{|n-m|}{|\log_2 \delta|} > 1$, en (b)

la suma en (b) con $\frac{|\log_2 \delta|}{2} \leq r \leq |\log_2 \delta|$ y por último

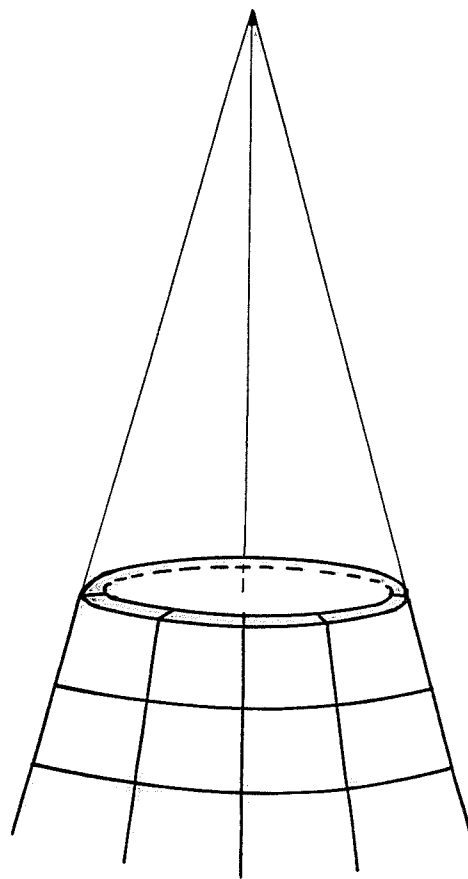
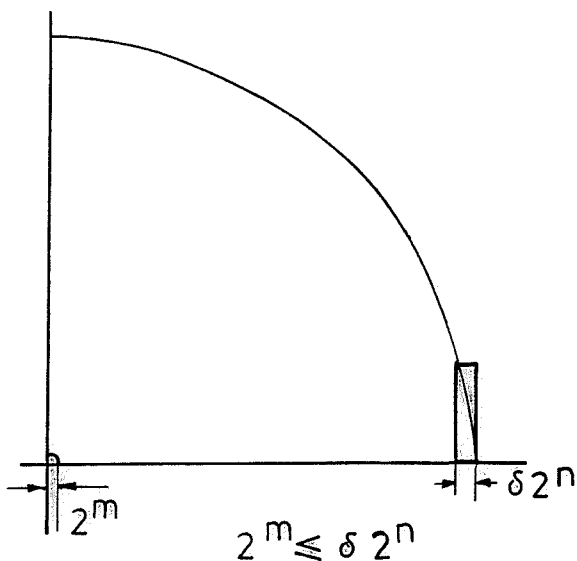
(c) corresponderá a sumar los r con $0 \leq r \leq \frac{|\log_2 \delta|}{2}$.

2.9 Primer caso

Vamos a estimar Σ que corresponde a la suma (a)

$$\Sigma_{(a)} = \Sigma_{r \geq |\log_2 \delta|} \left(\int \left| \sum_n \sum_{j,k} \sum_{\nu, \mu} \frac{a_{nj\nu} a_{n-r,k,\mu}}{2^{2n/q} 2^{2(n-r)/q}} \phi_{nj\nu} * \phi_{n-r,k,\mu}(x) \right|^s dx \right)^{1/s}$$

Geométicamente $n-m \geq |\log_2 \delta|$ significa que $2^m \leq \delta 2^n$, es decir, que el tamaño de $\bigcup_m \Gamma_m^*$ con $m \leq n + |\log_2 \delta|$ es más pequeño que la anchura de cualquier bloque $\mathcal{Q}_{nj\nu}$



De este modo, fijado un punto pertenecerá como mucho a cuatro soportes distintos del tipo $\text{sop}(\phi_{nj\nu} * \phi_{n-r,k,\mu})$ al ir variando

Diremos pues que $\text{sop}(\phi_{nj\bar{u}} * \phi_{n-r,k,\mu})$ son "casi disjuntos" o que tienen un solapamiento finito al variando j, \bar{u} . En tal caso escribiremos

$$\text{sop}(\phi_{nj\bar{u}} * \phi_{n-r,k,\mu}) \cap \text{sop}(\phi_{nj'\bar{u}'} * \phi_{n-r,k,\mu}) = \emptyset$$

salvo que sean $\quad = \quad =$

Esto último no afecta al resultado ya que el considerar exactamente cuánto se solapan sólo cambiará la constante independiente de la descomposición, que aparece en las desigualdades obtenidas.

También $\text{sop}(\phi_{nj\bar{u}} * \phi_{n-r,k,\mu})$ es "casi igual" $\text{sop}(\phi_{nj\bar{u}} * \phi_{n-r,k',\mu'})$ y escribiremos

$$\text{sop}(\phi_{nj\bar{u}} * \phi_{n-r,k,\mu}) \simeq \text{sop}(\phi_{nj\bar{u}} * \phi_{n-r,k',\mu'})$$

para todos los índices k', μ'

Observemos que hay $M = \delta^{-1/2} \cdot \delta^{-1/2} = \delta^{-1}$ de tales índices y de este modo, fijado un \quad en $\sum_{(a)}$

$$\left(\int \left| \sum_n \sum_{jk} \sum_{u\bar{u}} \frac{a_{nj\bar{u}} a_{n-r,k,\mu}}{2^{2n/q} 2^{2(n-r)/q}} \phi_{nj\bar{u}} * \phi_{n-r,k,\mu}(x) \right|^s dx \right)^{1/s} \leq$$

$$\leq C \left(\sum_n \sum_j \frac{|a_{nj\mu}|^s}{2^{2ns/q} 2^{2(n-r)s/q}} \int |\phi_{nj\mu} * \sum_{k,\mu} a_{n-r,k,\mu} \phi_{n-r,k,\mu}(x)|^s dx \right)^{1/s} \leq$$

$$2.10 \leq C \left(\sum_n \sum_{jk} \sum_{\mu} \frac{(\delta^{-1})^{s-1} |a_{nj\mu}|^s |a_{n-r,k,\mu}|^s}{2^{2ns/q} 2^{2(n-r)s/q}} \int |\phi_{nj\mu} * \phi_{n-r,k,\mu}(x)|^s dx \right)^{1/s}$$

puesto que $\left(\sum_{k=1}^M a_k \right)^p \leq M^{p-1} \left(\sum_{k=1}^M a_k^p \right)$ $p \geq$ por la

desigualdad de Hölder,

y como

$$\int |\phi_{nj\mu} * \phi_{n-r,k,\mu}(x)|^s dx \leq \|\phi_{nj\mu} * \phi_{n-r,k,\mu}\|_\infty^s |\text{sop}(\phi_{nj\mu} * \phi_{n-r,k,\mu})|$$

siendo

$$\|\phi_{nj\mu} * \phi_{n-r,k,\mu}\|_\infty \sim |\text{sop}(\phi_{n-r,k,\mu})| = \delta^2 2^{3(n-r)}$$

$$|\text{sop}(\phi_{nj\mu} * \phi_{n-r,k,\mu})| \sim |\text{sop}(\phi_{nj\mu}) + \text{sop}(\phi_{n-r,k,\mu})| \sim$$

$$\sim |\text{sop}(\phi_{nj\mu})| = \delta^2 2^{3n}$$

$$\text{será } \int |\phi_{nj\mu} * \phi_{n-r,k,\mu}(x)|^s dx \leq \delta^{2s+2} 2^{3(n-r)s} 2^{3n}$$

con lo cual la expresión 2.10 es

$$\leq C \left(\sum_n \sum_{jk} \sum_{\mu} \frac{\delta^{1-s} \delta^{2s+2}}{2^{2ns/q} 2^{2(n-r)s/q}} 2^{3n} 2^{3(n-r)s} |a_{nj\mu}|^s |a_{n-r,k,\mu}|^s \right)^{1/s} \leq$$

$$\begin{aligned}
& C \left(\sum_n \delta^{2s-2} \left(\frac{2^{n-r}}{2^n} \right)^{\frac{3s-3}{2}} \left(\sum_{j \cup} |a_{nj \cup}|^{\frac{2s}{3-s}} \delta^2 2^{3n} \right)^{\frac{3-s}{2}} \left(\sum_{k \cup} |a_{n-r, k \cup}|^{\frac{2s}{3-s}} \delta^2 2^{3(n-r)} \right)^{\frac{3-s}{2}} \right)^{1/s} \leq \\
& C \left(\delta^{2s-2} 2^{-r \frac{3s-3}{2}} \left(\left(\sum_n \left(\sum_{j \cup} |a_{nj \cup}|^{\frac{2s}{3-s}} \delta^2 2^{3n} \right)^{3-s} \right)^{1/2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\sum_n \left(\sum_{k \cup} |a_{n-r, k \cup}|^{\frac{2s}{3-s}} \delta^2 2^{3(n-r)} \right)^{3-s} \right)^{1/2} \right)^{1/s} \right. \\
& \quad \left. C \delta^{\frac{2s-2}{s}} 2^{-r \frac{3s-3}{2s}} \left(\sum_{nj \cup} |a_{nj \cup}|^{\frac{2s}{3-s}} \delta^2 2^{3n} \right)^{\frac{3-s}{s}} \right)
\end{aligned}$$

en donde hemos utilizado la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el hecho de que

$$\sum_n A_n^{3-s} \leq \left(\sum_n A_n \right)^{3-s}$$

al ser $3-s \geq 1$

De este modo

$$\sum_{(a)} \leq C \sum_{r \geq |\log_2 \delta|} \delta^{\frac{2s-2}{s}} 2^{-r \frac{3s-3}{2s}} \left(\sum_{nj \cup} |a_{nj \cup}|^{\frac{2s}{3-s}} \delta^2 2^{3n} \right)^{\frac{3-s}{2}}$$

$$\text{y al ser} \quad \sum_{r \geq |\log_2 \delta|} 2^{-r \frac{3s-3}{2s}} \sim \delta^{\frac{3s-3}{2s}}$$

queda finalmente

$$\sum_{(a)} \leq C \delta^{\frac{7s-7}{4s}} \left(\sum_{nj \cup} |a_{nj \cup}|^{\frac{2s}{3-s}} \delta^2 2^{3n} \right)^{\frac{3-s}{s}}$$

1 Segundo caso

Tomaremos ahora $\delta 2^n \leq 2^m$ con $\delta^{1/2} 2^m \leq \delta 2^n$
es decir, los $= n-m$ tales que $\frac{|\log_2 \delta|}{2} \leq n-m \leq |\log_2 \delta|$.
Geométricamente significa que el tamaño de Γ_m es mayor que
el lado pequeño de $Q_{nj\cup}$, pero el lado mayor de $Q_{mj\cup}$ es
más pequeño que el espesor de $Q_{nj\cup}$.

Fijado un $= n-m$ de este caso

$$\text{sop}(\phi_{nj\cup} * \phi_{mk\mu}) \cap \text{sop}(\phi_{nj'\cup'} * \phi_{mk'\mu'}) = \emptyset$$

excepto para

mientras que si fijamos $\phi_{nj\cup}$ puede ser

$$\text{sop}(\phi_{nj\cup} * \phi_{mk\mu}) \cap \text{sop}(\phi_{nj\cup} * \phi_{mk'\mu'}) \neq \emptyset$$

para ciertos índices k', μ

Si fijamos las direcciones angulares μ, μ' en
esta última intersección, las intersecciones serán no va-
cías para todo k, k' . Luego, fijadas las direcciones angu-
lares, un punto pertenecerá como mucho a $\delta^{-1/2}$ soportes
distintos. Esto nos da el solapamiento vertical.

Para el solapamiento horizontal, una vez fijadas

las alturas j, k es suficiente con ver como se solapan en una sección S_{jk} perpendicular al eje del cono y a una altura

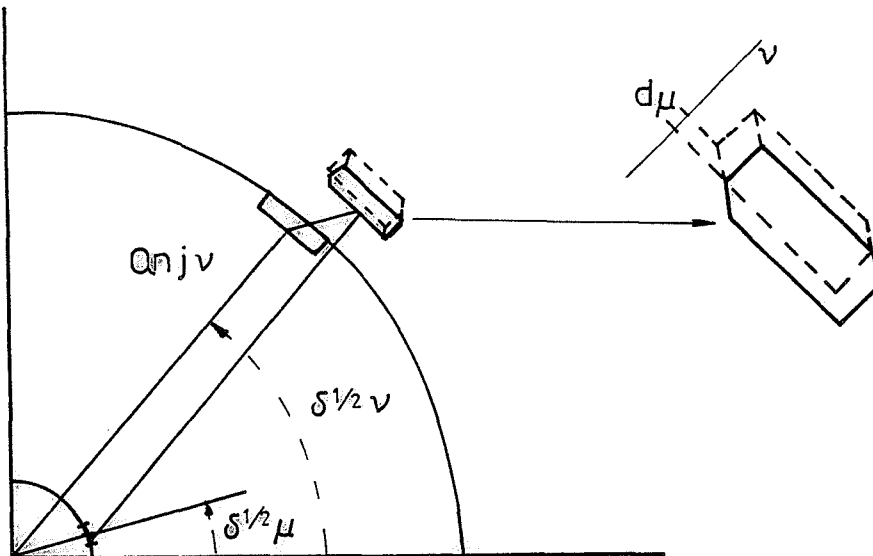
$$2^n + 2^m + j \delta^{1/2} 2^n + k \delta^{1/2} 2^m$$

ya que es a esta altura donde vive $\text{sop}(\phi_{njv} * \sum_{\mu} \phi_{mk\mu})$ y la suma final $\text{sop}(\phi_{njv}) + \text{sop}(\phi_{mk\mu})$ consistirá en extender el corte con S_{jk} paralelamente a la dirección vertical de $\text{sop}(\phi_{njv})$

Sobre el plano S_{jk} , $\text{sop}(\phi_{njv} * \phi_{mk\mu})$ está centrado en el punto

$$2^n (1 + \delta^{1/2} j) e^{\frac{\pi}{2} v i} + 2^m (1 + \delta^{1/2} k) e^{\frac{\pi}{2} \mu i}$$

y esencialmente es como un paralelogramos de longitud $2^n \delta^{1/2}$ y anchura $\delta^{1/2} 2^m \sin((|v-\mu|+1)\delta^{1/2}) \simeq \delta 2^m (|v-\mu|+1)$



De este modo $\text{sop}(\phi_{nj\mu} * \phi_{mk\mu})$ está separado $\delta 2^m |v-\mu|$ de $\text{sop}(\phi_{nj\mu} * \phi_{m,k,\mu+1})$ como puede verse si los proyectamos en la dirección v

Luego el solapamiento entre los diferentes soportes al ir variando v, μ será máximo cuando $\mu = v$. En tal caso un punto pertenecerá como mucho a N soportes con tal que

$$\delta 2^m (1 + 2 + \dots + N) \sim \delta 2^n$$

$$\text{esto es } N \sim (2^{n-m})^{1/2}$$

Así pues

$$\begin{aligned} & \left(\int \left| \sum_n \sum_{jk} \sum_{\nu\mu} \frac{a_{nj\nu} a_{n-r,k,\mu}}{2^{2n/q} 2^{2(n-r)/q}} \phi_{nj\nu} * \phi_{n-r,k,\mu}(x) \right|^s dx \right)^{1/s} \\ & \leq C \left(\sum_n \sum_{jk} \sum_{\nu\mu} (\delta^{\frac{-1}{2}})^{s-1} \left(\frac{2^n}{2^{n-r}} \right)^{\frac{s-1}{2}} \frac{|a_{nj\nu}|^s |a_{n-r,k,\mu}|^s}{2^{2ns/q} 2^{2(n-r)s/q}} \int |\phi_{nj\nu} * \phi_{n-r,k,\mu}(x)|^s dx \right)^{1/s} \end{aligned}$$

y calculando de manera análoga al primer caso esta última expresión es

$$\leq C 2^{-r \frac{s-1}{s}} \delta^{\frac{5s-5}{2s}} \left(\sum_{nj\nu} |a_{nj\nu}|^{\frac{2s}{3-s}} \delta^2 2^{3n} \right)^{\frac{3-s}{s}}$$

y ahora

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= \left(\int \left| \sum_n \sum_{jk} \sum_{\nu\mu} \frac{a_{nj\nu} a_{n-r,k,\mu}}{2^{n/q} 2^{(n-r)/q}} \phi_{nj\nu}^* \phi_{n-r,k,\mu}(x) \right|^s dx \right)^{1/s} \leq \\
 (b) \quad & \frac{|\log_2 \delta|}{2} \leq r \leq |\log_2 \delta| \\
 & \leq C \left(\sum_{r \geq \frac{|\log_2 \delta|}{2}} 2^{-r \frac{s-1}{s}} \right) \delta^{\frac{5s-5}{2s}} \left(\sum_{nj\nu} |a_{nj\nu}|^{\frac{2s}{3-s}} \delta^2 2^{3n} \right)^{\frac{3-s}{s}} \leq \\
 & \leq C \delta^{\frac{3s-3}{s}} \left(\sum_{nj\nu} |a_{nj\nu}|^{\frac{2s}{3-s}} \delta^2 2^{3n} \right)^{\frac{3-s}{s}}
 \end{aligned}$$

2.12 Tercer caso

Este último caso corresponde a los pares $m \leq n$ con $\delta 2^n \leq \delta^{1/2} 2^m$, es decir, $r = n-m \leq \frac{|\log_2 \delta|}{2}$. En la descomposición geométrica esto significa que el lado mayor del bloque $Q_{mk\mu}$ será mayor que el lado pequeño del $Q_{nj\nu}$.

Ahora deberemos tener en cuenta muy precisamente que si está cerca de el solapamiento va a ser pequeño y el tamaño grande, mientras que al ir alejando de el solapamiento aumentará y el tamaño decrece. Lo maravilloso es que se compensa exactamente lo uno con lo otro y contribuyen al valor deseado.

Para el solapamiento vertical, consideremos en Γ_m^* los $\frac{2^m}{\delta^{1/2} 2^n}$ anillos $\Gamma_{m\ell}^*$ de altura $\delta^{1/2} 2^n$, donde

$\Gamma_{m\ell}^*$ es el anillo formado por la unión $\bigcup_{k,\mu} Q_{mk\mu}$ donde
 recorre todas las direcciones angulares $y \delta^{1/2} 2^n \ell$
 $\leq \delta^{1/2} 2^m k \leq \delta^{1/2} 2^{n(\ell+1)}$ de este modo

$$(\Gamma_{m\ell}^* + \text{sop}(\phi_{nj\cup})) \cap (\Gamma_{m\ell'}^* + \text{sop}(\phi_{nj'\cup})) \neq \emptyset$$

para $\ell + j = \ell' + j'$, mientras que esta intersección ten
drá un solapamiento finito si $\ell + j \neq \ell' + j'$.

Por eso, fijados $l = n-m$, un punto en
 $\Gamma_{m\ell}^* + \text{sop}(\phi_{nj\cup})$ pertenecerá como mucho a $\frac{2^m}{\delta^{1/2} 2^n}$ sumas
 distintas de este tipo.

Por otra parte

$$\text{sop}(\phi_{nj\cup} * \sum_{\mu} \phi_{mk\mu}) \cap \text{sop}(\phi_{nj'\cup} * \sum_{\mu} \phi_{mk'\mu}) \neq \emptyset$$

para todo k, k' con $\text{sop}(\sum_{\mu} \phi_{mk\mu}) \subset \Gamma_{m\ell}^*$ y $\text{sop}(\sum_{\mu} \phi_{mk'\mu}) \subset \Gamma_{m\ell'}^*$

Como hay $\frac{2^n}{2^m}$ de tales índices $..$, resulta que un
 punto en $\text{sop}(\phi_{nj\cup} * \sum_{\mu} \phi_{mk\mu})$ pertenecerá como mucho a
 $(\frac{2^m}{\delta^{1/2} 2^n}) (\frac{2^n}{2^m}) = \delta^{-1/2}$ distintos soportes de esta
 clase.

De este modo, fijado $l = n-m$

$$(\int |\sum_n \sum_{jk} \sum_{\mu} \frac{a_{nj\cup} a_{mk\mu}}{2^{2n/q} 2^{2m/q}} \phi_{nj\cup} * \phi_{mk\mu}(x)|^s dx)^{1/s}$$

$$\left(\sum_n \sum_{jk} \frac{\delta^{-\frac{1}{2}(s-1)}}{2^{ns/q} 2^{ms/q}} \int_{\mathbb{U}} \left| \sum_{\nu} a_{nj\nu} \phi_{nj\nu} * \sum_{\mu} a_{mk\mu} \phi_{mk\mu}(x) \right|^s dx \right)^{1/s}$$

Para estudiar el solapamiento horizontal, fijado $n-m$, habrá que tener en cuenta que si dos soportes $Q_{nj\nu}$ - $Q_{mk\mu}$ tienen poca separación angular $|\nu-\mu|$, el tamaño de la suma $Q_{nj\nu} + Q_{mk\mu}$ será como el tamaño del soporte más grande $Q_{nj\nu}$ y habrá mucho solapamiento con otros soportes. Lo contrario sucede si la separación angular es grande.

Se tiene

$$\begin{aligned} 2.13 \quad & \int_{\mathbb{U}} \left| \sum_{\nu} a_{nj\nu} \phi_{nj\nu} * \sum_{\mu} a_{mk\mu} \phi_{mk\mu}(x) \right|^s dx \\ & \leq \sum_{\nu\mu} M(\nu, \mu)^{s-1} |a_{nj\nu}|^s |a_{mk\mu}|^s \int |\phi_{nj\nu} * \phi_{mk\mu}(x)|^s dx \end{aligned}$$

donde $M = M(\nu, \mu)$ es la función de solapamiento.

M , que depende de ν y de μ , indica cuánto se solapa $\text{sop}(\phi_{nj\nu} * \phi_{mk\mu})$ con los demás soportes $\text{sop}(\phi_{nj\nu'} * \phi_{mk\mu'})$ al ir variando ν', μ' .

Dicho de otra manera, si

$$M(x) = \max_{\nu, \mu} \sum \chi_{\text{sop}(\phi_{nj\nu} * \phi_{mk\mu})}(x) \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^3$$

será

$$M(u, \mu) = \max_{x \in \text{sop}(\phi_{nj_u} * \phi_{mk_\mu})} M(x)$$

Para acotar la expresión 2.13 utilizaremos los dos siguientes lemas

2.14 Lema

La función de solapamiento $M(u, \mu)$ está acotada
por

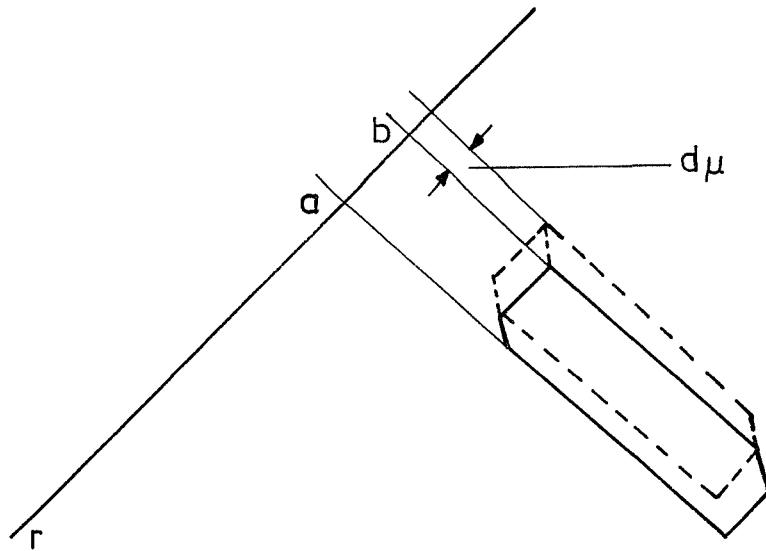
$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \text{si } |u - \mu| + 1 \leq 2^{n-m} \quad M(u, \mu) \leq \frac{2^{n-m}}{|u - \mu| + 1} \\ \text{(b)} \quad & \text{si } |u - \mu| + 1 \geq 2^{n-m} \quad M(u, \mu) \leq 4 \end{aligned}$$

Demostración

Vamos a proceder de manera análoga al segundo caso 2.1 anterior, estudiando la situación geométrica en el plano S_{jk} tal como aparece en la figura.

Si, fijados u, μ , proyectamos $\text{sop}(\phi_{nj_u} * \phi_{mk_\mu})$ sobre la recta que da la dirección radial de $\text{sop}(\phi_{nj_u})$ y la proyección es el segmento $[a, b]$, entonces la proyec

ción



de $\text{sop}(\phi_{njv} * \phi_{m,k,\mu+1})$ sobre \quad será el segmento $[a + d_\mu, b + d_\mu]$ si $\mu \geq v$ (ó $[a - d_\mu, b - d_\mu]$ si $\mu \leq v$), siendo d_μ la proyección de $\text{sop}(\phi_{mk\mu})$ sobre \quad es decir

$$d_\mu = \delta 2^m \text{sen}(|v-\mu| + 1) \simeq \delta 2^m (|v-\mu| +$$

De esta manera si $d_\mu \geq \delta 2^n$, es decir, si $|v-\mu| + 1 \geq 2^{n-m}$ hay solapamiento finito y $M \leq 4$

si $d_\mu \leq \delta 2^n$, sea $\mu \geq v$, entonces si

$$2.15 \quad d_\mu + d_{\mu-1} + d_v \geq \delta 2^n$$

existirá un tal que

$$d_{\mu} + d_{\mu-1} + \dots + d_{\mu-M} \geq \delta 2^n$$

$M(u, \mu)$ será el primer que cumple esta última relación, M verifica pues

$$\delta 2^m (\mu-u) + \delta 2^m (\mu-u-1) + \dots + \delta 2^m (\mu-u-M) \simeq \delta 2^n$$

luego $(\mu-u)M - \frac{M^2}{2} \simeq 2^{n-m}$

y por tanto

$$M = (\mu-u) - \frac{2 \cdot 2^{n-m}}{(\mu-u) + \sqrt{(\mu-u)^2 - 2 \cdot 2^{n-m}}} \leq C \frac{2^{n-m}}{|\mu-u| + 1}$$

Si fuera $d_u + d_{u+1} + \dots + d_{\mu} \leq \delta 2^n$ entonces sería

$$2.1 \quad 2^{n-m} \geq \sum_{j=0}^{\mu-u} (\mu-u-j) = (\mu-u)^2 - \frac{(\mu-u)^2}{2} = \frac{1}{2} (\mu-u)^2$$

y hay que tomar como $M(u, \mu)$ el primer tal que

$$d_u + d_{u+1} + \dots + d_M \simeq \delta 2^n$$

es decir

$$\delta 2^m + 2 \delta 2^m + \dots + M \delta 2^m \sim \delta 2^n$$

$$M \sim (2^{n-m})^{1/2}$$

y también se cumple el Lema ya que

$$M \sim (2^{n-m})^{1/2} \leq \frac{2^{n-m}}{\mu - \nu + 1}$$

por la condición 2.1'

Si $\mu \leq \nu$ se procede exactamente igual, pues hay una completa simetría en ambos casos. ■

2.18 Lema

Se cumple

$$(a) \quad \int |\phi_{nj\nu} * \phi_{mk\mu}(x)|^s dx \leq \delta^{2s+2} 2^{3ms} 2^{3n}$$

$$\text{si } |\nu - \mu| + 1 \leq 2^{n-m}$$

$$(b) \quad \int |\phi_{nj\nu} * \phi_{mk\mu}(x)|^s dx \leq \frac{\delta^{2s+2} 2^{(2+s)n} 2^{m(2s+1)}}{(|\nu - \mu| + 1)^{s-1}}$$

$$\text{si } |\nu - \mu| + 1 \geq 2^{n-m}$$

Demostración

En efecto, en ambos casos es

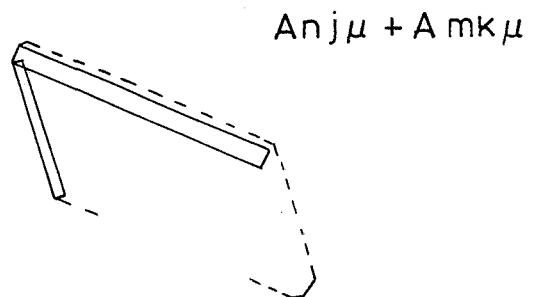
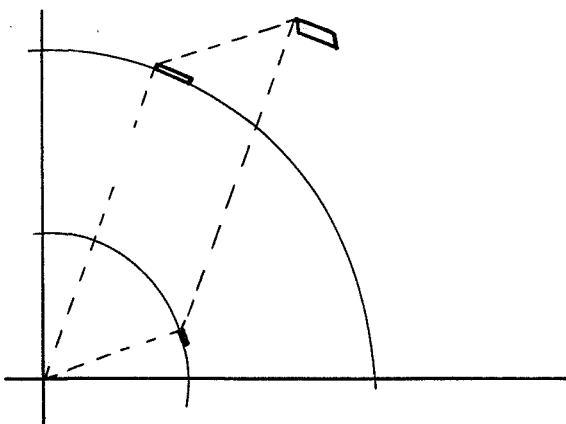
$$.19 \int |\phi_{nj\mu} * \phi_{mk\mu}|^s dx \leq \|\phi_{nj\mu} * \phi_{mk\mu}\|_\infty^s |\text{sop}(\phi_{nj\mu} * \phi_{mk\mu})|$$

Para calcular $|\text{sop}(\phi_{nj\mu} * \phi_{mk\mu})|$ observemos que $\text{sop}(\phi_{nj\mu} * \phi_{mk\mu}) = \text{sop}(\phi_{nj\mu}) + \text{sop}(\phi_{mk\mu}) = Q_{nj\mu} + Q_{mk\mu}$ y esta suma esencialmente es como un paralelepípedo de altura

$$\delta^{1/2} 2^n + \delta^{1/2} 2^m \leq 2 \delta^{1/2} 2^n$$

y cuya sección, que está en el plano S_{jk} , es la suma $A_{nj\mu} + A_{mk\mu}$, donde $A_{nj\mu}$ y $A_{mk\mu}$ son, respectivamente, las secciones de $Q_{nj\mu}$ y $Q_{mk\mu}$ por un plano perpendicular al eje del cono.

$A_{nj\mu}$ es un rectángulo de dimensiones $\delta^{1/2} 2^n \times \delta 2^n$ y al ser la anchura despreciable frente a la longitud, $A_{nj\mu} + A_{mk\mu}$ esencialmente es un paralelogramo cuyos



lados son dos vectores de longitudes $\delta^{1/2} 2^n$ y $\delta^{1/2} 2^m$ separados por un ángulo $\alpha = (|v-\mu| + 1) \delta^{1/2}$, de este modo

$$|A_{njv} + A_{mk\mu}| \leq \delta^{1/2} 2^n \delta^{1/2} 2^m \sin((|v-\mu| + 1) \delta^{1/2}) \leq$$

$$\delta^{3/2} 2^n 2^m (|v-\mu| + 1)$$

y por tanto

$$2.20 \quad |\text{sop}(\phi_{njv} * \phi_{mk\mu})| \leq C \delta^2 2^{2n} 2^m (|v-\mu| + 1)$$

En cuanto a la convolución

$$\phi_{njv} * \phi_{mk\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{njv}(x-y) \phi_{mk\mu}(y) dy$$

el integrando vale 1 si fijado

$$y \in \text{sop}(\phi_{njv}) \quad \text{y} \quad y \in \text{sop}(\phi_{mk\mu})$$

$$\text{es decir} \quad y \in (x - \text{sop}(\phi_{njv})) \cap \text{sop}(\phi_{mk\mu})$$

en otro caso el integrando vale 0. Luego

$$\phi_{njv} * \phi_{mk\mu}(x) = |(x - \text{sop}(\phi_{njv})) \cap \text{sop}(\phi_{mk\mu})|$$

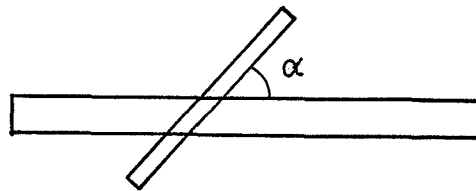
$$\text{y por tanto} \quad \|\phi_{njv} * \phi_{mk\mu}\|_{\infty} = |R_{nm}^{jv}|$$

donde R_{nm}^{jv} es la máxima intersección que puede tener

Q_{njv} con $Q_{mk\mu}$, que es

$$2.21 \quad \|\phi_{njv} * \phi_{mk\mu}\|_{\infty} = |R_{nm}^{jv}| \leq \frac{\delta^2 \delta^{1/2}}{\sin((|v-\mu|+1)\delta^{1/2})} \sim \frac{\delta^2}{|v-\mu|+1}$$

Finalmente, de las expresiones 2.19, 2.20 y 2.2 e obtienen los dos casos (a) (b) del lema ■



R_{nm}^{jv}

De acuerdo con los cálculos de los lemas 2.14 y 2.18 tendremos pues en la expresión 2.1~

$$\begin{aligned} & \int \left| \sum_v a_{njv} \phi_{njv} * \sum_{\mu} a_{mk\mu} \phi_{mk\mu}(x) \right|^s dx \leq \\ & \leq C \left[\sum_n \sum_{jk} \frac{\delta^{-\frac{1}{2}(s-1)}}{2^{2ns/q} 2^{2ms/q}} \left[\sum_{|v-\mu|+1 \leq 2^{n-m}} \left(\frac{2^{n-m}}{|v-\mu|+1} \right)^{s-1} \delta^{2s+2} 2^{3n} \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. 2^{3m} |a_{njv}|^s |a_{mk\mu}|^s \right. \right. \\ & \left. \left. \sum_{|v-\mu|+1 \geq 2^{n-m}} \delta^{2s+2} 2^{n(2+s)} 2^{m(2s+1)} \frac{|a_{njv}|^s |a_{mk\mu}|^s}{(|v-\mu|+1)^{s-1}} \right] \right]^{1/s} \end{aligned}$$

$$\leq C \left[\sum_n \sum_{j,k} \frac{\delta^{-\frac{1}{2}(s-1)} \delta^{2s+2} 2^{m(2s+1)} 2^{n(2+s)}}{2^{2ns/q} 2^{2ms/q}} \cdot \sum_{\nu, \mu} \frac{|a_{nj\nu}|^s |a_{mk\mu}|^s}{(|\nu-\mu| + 1)^{s-1}} \right]^{1/s}$$

Y para acotar esta expresión emplearemos el siguiente

2.22 Lema

$$\sum_{\nu, \mu} \frac{|a_{nj\nu}|^s |a_{mk\mu}|^s}{(|\nu-\mu| + 1)^{s-1}} \leq C \left(\sum_{\nu} |a_{nj\nu}|^{\frac{2s}{3-s}} \right)^{\frac{3-s}{2}} \left(\sum_{\mu} |a_{mk\mu}|^{\frac{2s}{3-s}} \right)^{\frac{3-s}{2}}$$

Demostración

Es una consecuencia directa del teorema de integración fraccionaria 1.57. En efecto

$$\sum_{\nu, \mu} \frac{|a_{nj\nu}|^s |a_{mk\mu}|^s}{(|\nu-\mu| + 1)^{s-1}} = \sum_{\nu} A_{\nu} B_{\nu} \leq \left(\sum_{\nu} A_{\nu}^{p_1} \right)^{1/p_1} \left(\sum_{\nu} B_{\nu}^{p_1'} \right)^{1/p_1'}$$

$$\text{donde hemos puesto } A_{\nu} = |a_{nj\nu}|^s, B_{\nu} = \sum_{\mu} \frac{|a_{mk\mu}|^s}{(|\nu-\mu| + 1)^{s-1}}$$

y hemos aplicado la desigualdad de Hölder para $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} =$

Pero de acuerdo con el teorema 1.57

$$\left(\sum_{\nu} B_{\nu}^{p_1'} \right)^{1/p_1'} \leq C \left(\sum_{\nu} A_{\nu}^{p_1} \right)^{1/p_1}$$

con $\frac{1}{p_1} + (s-1) = 1 + \frac{1}{p_1} = 1 + 1 - \frac{1}{p_1}$

es decir $\frac{1}{p_1} = \frac{3-s}{2}$ ■

Luego nos queda finalmente

$$\begin{aligned} & \int \left| \sum_{\nu} a_{n j \nu} \phi_{n j \nu} * \sum_{\mu} a_{m k \mu} \phi_{m k \mu}(x) \right|^s dx \\ & \leq C \delta^{\frac{3s-3}{s}} 2^{-r \frac{s-1}{s}} \left(\sum_n \left(\sum_{j \nu} |a_{n j \nu}|^{\frac{2s}{3-s}} \delta^2 2^{3n} \right)^{\frac{3-s}{2}} \right. \\ & \quad \left. \left(\sum_{k \mu} |a_{n-r, k, \mu}|^{\frac{2s}{3-s}} \delta^2 2^{3(n-r)} \right)^{\frac{3-s}{2}} \right)^{1/s} \leq \\ & C \delta^{\frac{3s-3}{s}} 2^{-r \frac{s-1}{s}} \left(\sum_{n j \nu} |a_{n j \nu}|^{\frac{2s}{3-s}} \delta^2 2^{3n} \right)^{\frac{3-s}{s}} \end{aligned}$$

Y por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{(c)} &= \sum_{0 \leq r \leq \frac{\log_2 \delta}{2}} \left| \log_2 \delta \right| \int \left| \sum_n \sum_{j k} \sum_{\nu \mu} \frac{a_{n j \nu} a_{n-r, k, \mu}}{2^{2n/q} 2^{2(n-r)/q}} \phi_{n j \nu} * \phi_{n-r, k, \mu}(x) \right|^s dx \leq \\ & C \left(\sum_{r \geq 0} 2^{-r \frac{s-1}{s}} \right) \delta^{\frac{3s-3}{s}} \left(\sum_{n j \nu} |a_{n j \nu}|^{\frac{2s}{3-s}} \delta^2 2^{3n} \right)^{\frac{3-s}{s}} \end{aligned}$$

Juntando ahora los tres casos considerados, finalmente resulta

$$\sum_{(a)} + \sum_{(b)} + \sum_{(c)}^{1/2} \leq C \delta^{\frac{3s-3}{2s}} \left(\sum_{n j \nu} |a_{n j \nu}|^{\frac{2s}{3-s}} \delta^2 2^{3n} \right)^{\frac{3-s}{2s}}$$

y al ser $\frac{1}{q} = \frac{3s-3}{2s}$, $q' = \frac{2s}{3-s}$ hemos probado 2.8 ■

2.23 Corolario

Si es un trozo compacto del cono

$$2.24 \quad \left(\int_{\Sigma} |\hat{f}(\xi)|^q d\mu(\xi) \right)^{1/q} \leq c_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, siendo $d\mu(\xi)$ la medida de Lebesgue singular sobre $1 \leq p < 4/3$, $1 \leq q \leq p'/3$.

Demostración

No hay más que tener en cuenta que en un trozo compacto la medida de Lebesgue $d\mu$ está controlada por $d\sigma$ y luego aplicar la desigualdad de Hölder y el teorema anterior. ■

2.25 Proposición

Dada la superficie de un cono

$$2.26 \quad \left(\int_{\Gamma} |\hat{f}(\xi)|^q r^\alpha dr d\theta \right)^{1/q} \leq c_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

siendo $\alpha = \frac{3q}{p'} - 1$ $1 \leq q \leq \frac{1}{3} p'$ $1 \leq p < 4/3$.

Demostración

Es análoga a la del teorema 2.5, la potencia

es la necesaria para que se cancelen bien las potencias
de $2^n - 2^m$ que aparecen y lo demás se sigue del lema
de integracion fraccionaria 2.22 al ser $\ell^t \subset \ell^r$.
 $t \leq r$ █

C A P I T U L O I I I

Dada la superficie del cono . . si ensanchamos la superficie con homogeneidad, tal como hacemos en el teorema 2.5, de tal manera que a una altura . . tenga un espesor δr obtendremos el cono "grueso" Γ^* .

Vamos a probar que si . . es suficientemente pequeño

$$\left(\frac{1}{\delta} \int_{\Gamma^*} |\hat{f}(\xi)|^{4/3} \frac{d\xi}{|\xi|^2} \right)^{3/4} \leq C |\log \delta|^{1/2} \|f\|_{4/3}$$

Obsérvese que si no existiera el factor $|\log \delta|$, a la derecha de esta desigualdad, haciendo tender . . hacia cero obtendríamos la restricción

$$3.2 \quad \|\hat{f}\|_{L^{4/3}(\Gamma, d\sigma)} \leq C \|f\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^3)}$$

que sabemos que es falsa (ver 3.14). Esta es la razón por la que decimos que hay crecimiento logarítmico en la restricción.

Si $\phi_\delta(\xi)$ es la función característica de . . y ponemos $\psi_\delta(\xi) = \frac{1}{|\xi|^{3/2}} \phi_\delta(\xi)$ 3.1 se escribe entonces como

$$\|\psi_\delta \hat{f}\|_{4/3} \leq C \delta^{3/4} |\log \delta|^{1/2} \|f\|_{4/3}$$

Definimos el operador T_δ dado por el multiplicador

$$(T_\delta f)^\wedge(\xi) = \psi_\delta(\xi) \cdot \hat{f}(\xi)$$

con lo que

$$\begin{aligned} \|T_\delta \hat{f}\|_4 &= \sup_{\|g\|_{4/3} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^3} T_\delta \hat{f}(x) g(x) dx = \sup_{\|g\|_{4/3} \leq 1} \int (T_\delta \hat{f})^\wedge(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi \\ &= \sup_{\|g\|_{4/3} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^3} \psi_\delta(\xi) \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi \leq \sup_{\|g\|_{4/3} \leq 1} \|\psi_\delta \hat{g}\|_{4/3} \|f\|_4 \end{aligned}$$

Por tanto para probar 3.1, por la dualidad es suficiente con

$$3.3 \quad \|T_\delta \hat{f}\|_4 \leq C \delta^{3/4} |\log \delta|^{1/2} \|f\|_4$$

que es lo que probamos en el teorema 3.4. De hecho 3.1 y 3.3 son equivalentes y esta última viene a ser el teorema de extensión dual al de restricción.

3.4 Teorema

Existe una constante independiente de
tal que

$$\|T_\delta \hat{f}\|_4 \leq C \delta^{3/4} |\log \delta|^{1/2} \|f\|_4$$

para toda función $f \in S(\mathbb{R}^3)$

Demostración

Si $\phi_\delta^n(\xi)$ es la función característica del tronco de cono diádico Γ_n^* , pongamos $\psi_\delta^n(\xi) = \phi_\delta^n(\xi) \cdot \psi_\delta(\xi)$ y sea S_n el multiplicador

$$(S_n f)^\wedge(\xi) = \psi_\delta^n(\xi) \hat{f}(\xi)$$

Por el teorema de Littlewood-Paley

$$\|T_\delta \hat{f}\|_4 \simeq \|(\sum_n |S_n \hat{f}|^2)^{1/2}\|_4$$

por lo que

$$\begin{aligned} \|T_\delta \hat{f}\|_4^4 &\simeq \|(\sum_n |S_n \hat{f}|^2)^{1/2}\|_4^4 = \int_{\mathbb{R}^3} (\sum_n |S_n \hat{f}(\xi)|^2)^2 d\xi \\ &\leq \sum_{n,m} \int |S_n \hat{f}(\xi) S_m \hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{\substack{n,m \\ m \leq n}} \int |(S_n \hat{f})^\wedge(x) * (S_m \hat{f})^\wedge(x)|^2 dx = \end{aligned}$$

$$3.6 = \sum_{m \leq n} \int \left| \sum_{j \cup} \frac{1}{2^{3n/2}} f_{nj \cup}(x) * \sum_{k \cup} \frac{1}{2^{3m/2}} f_{mk \cup}(x) \right|^2 dx =$$

donde $f_{nj \cup} = f \cdot \phi_{nj \cup}$ es la restricción de f al bloque $Q_{nj \cup}$, que está en Γ_n^* a una altura $2^n + 2^{n_j} \delta^{1/2}$ y con una dirección angular $\delta^{1/2} 2^n \cup$ como en 2.5

Dividimos ahora la suma 3.6 en $|\log_2 \delta|$ sumandos, de modo que cada uno de ellos contenga índices n, m

con $n-m \geq |\log_2 \delta|$.

Sea uno de estos sumandos,

$$I \leq C |\log_2 \delta| \sum_{n,m \in \Delta} \int \left| \sum_{j \in U} \frac{1}{2^{3n/2}} f_{njU} * \sum_{k \in U} \frac{1}{2^{3n/2}} f_{mkU}(x) \right|^2 dx \leq$$

$$C |\log \delta| \left[\sum_{n \in \Delta} \int \left| \sum_{j \in U} \frac{1}{2^{3n/2}} f_{njU} * \sum_{k \in U} \frac{1}{2^{3n/2}} f_{nkU}(x) \right|^2 dx \right.$$

$$+ \sum_{\substack{n \neq m \\ n,m \in \Delta}} \int \left| \sum_{j \in U} \frac{1}{2^{3n/2}} f_{njU} * \sum_{k \in U} \frac{1}{2^{3m/2}} f_{mkU}(x) \right|^2 dx \Big] =$$

$$C |\log \delta| \left(\begin{array}{cc} \sum & \sum \\ (1) & (2) \end{array} \right)$$

(a) Vamos a acotar $\sum_{(1)}$

Observemos que

$$\text{sop} \left(\sum_U f_{njU} * \sum_{\mu} f_{nk\mu} \right) \cap \text{sop} \left(\sum_U f_{nj'U} * \sum_{\mu} f_{nk'\mu} \right) \neq$$

si y sólo si $j + k = j' + k$

Luego, como j, k varían desde hasta $\delta^{-1/2}$, $\text{sop} \left(\sum_U f_{njU} * \sum_{\mu} f_{nk\mu} \right)$ se solapa como mucho $\delta^{-1/2}$ veces con otros soportes, de este modo

$$\sum_{(1)} = \sum_{n \in \Delta} \int \left| \sum_{j \in U} \frac{1}{2^{3n/2}} f_{njU} * \sum_{k \in U} \frac{1}{2^{3n/2}} f_{nkU}(x) \right|^2 dx$$

$$\leq C \sum_n \frac{\delta^{-1/2}}{2^{6n}} \sum_{jk} \int \left| \sum_{\nu} f_{nj\nu} * \sum_{\mu} f_{nk\mu}(x) \right|^2 dx$$

$$\leq C \sum_n \frac{\delta^{-1/2}}{2^{6n}} \sum_{jk} \sum_{\nu\mu} \int \left| f_{nj\nu} * f_{nk\mu}(x) \right|^2 dx$$

ya que

$$\text{sop}(f_{nj\nu} * f_{nk\mu}) \cap \text{sop}(f_{nj\nu'} * f_{nk\mu'}) \neq \emptyset$$

si $(\nu, \mu) \neq (\nu', \mu')$

Si probamos

$$3.7 \quad \left| f_{nj\nu} * f_{nk\mu}(x) \right|^2 dx \leq C \frac{\delta^2 2^{3n}}{|\nu-\mu|+1} \|f_{nj\nu}\|_2^2 \|f_{nk\mu}\|_2^2$$

tendremos

$$(1) \quad \sum_n \leq C \sum_n \frac{\delta^{-1/2}}{2^{6n}} \delta^2 2^{3n} \sum_{jk} \sum_{\nu\mu} \frac{\|f_{nj\nu}\|_2^2 \|f_{nk\mu}\|_2^2}{|\nu-\mu|+1}$$

$$\leq C \delta^{3/2} \sum_n \frac{1}{2^{3n}} \sum_{jk} |\log_2 \delta| \left(\sum_{\nu} \|f_{nj\nu}\|_2^4 \right)^{1/2} \left(\sum_{\mu} \|f_{nk\mu}\|_2^4 \right)^{1/2}.$$

$$\leq C \delta^{3/2} \sum_n \frac{1}{2^{3n}} |\log_2 \delta| (\delta^{-1/2})^{\frac{1}{2} \cdot 2} \left(\sum_{j\nu} \|f_{nj\nu}\|_2^4 \right)^{1/2} \left(\sum_{k\mu} \|f_{nk\mu}\|_2^4 \right)^{1/2}$$

y al ser

$$\|f_{nj\nu}\|_2^2 = \int |f_{nj\nu}|^2 \leq (\delta^2 2^{3n})^{1/2} \|f_{nj\nu}\|_4^2$$

obtendremos finalmente

$$3.8 \quad \sum_{(1)} \leq C \delta |\log_2 \delta| \sum_n \delta^2 \frac{2^{3n}}{2^{3n}} \left(\sum_{j\cup} \|f_{nj\cup}\|_4^4 \right) \\ C \delta^3 |\log_2 \delta| \sum_{nj\cup} \|f_{nj\cup}\|_4^4 = C \delta^3 |\log \delta| \|f\|_4^4$$

(b) Probaremos la desigualdad 3.7 , esto es

$$3.9 \text{ Lema } \int |f_{nj\cup} * f_{nk\mu}(x)|^2 dx \leq C \frac{\delta^2 2^{3n}}{|v-\mu|+1} \|f_{nj\cup}\|_2^2 \|f_{nk\mu}\|_2^2$$

Demostración

Dada la losa $Q_{nj\cup}$ la subdividimos en $\delta^{-1/2} \times \delta^{-1/2}$ cubos $Q_{nj\cup}^{rp}$ donde $Q_{nj\cup}^{rp}$ es el cubo de lados $[\times \delta \times]$ que está a una altura $2^n + 2^n j \delta^{1/2} + 2^n r \delta$ y forma un ángulo $v \delta^{1/2} + p \delta$. De este modo, si $f_{nj\cup}^{rp}$ es la restricción de $Q_{nj\cup}^{rp}$ tendremos $f_{nj\cup} = \sum_{rp} f_{nj\cup}^{rp}$

$$\int |f_{nj\cup} * f_{nk\mu}(x)|^2 dx = \int \left| \sum_{rp} f_{nj\cup}^{rp} * \sum_{sq} f_{nk\mu}^{sq}(x) \right|^2 dx \leq \\ \leq C \delta^{-1/2} \sum_{rs} \int \left| \sum_p f_{nj\cup}^{rp} * \sum_q f_{nk\mu}^{sq}(x) \right|^2 dx$$

ya que, siguiendo un razonamiento parecido al del apartado 2.12,

será

$$\text{sop} \left(\sum_p f_{nju}^{rp} * \sum_q f_{nk\mu}^{sq} \right) = \text{sop} \left(\sum_p f_{nju}^{r'p} * \sum_q f_{nk\mu}^{s'q} \right)$$

s s , siendo la intersección vacía en otro caso.

Ahora

$$\delta^{-1/2} \sum_{rs} \int \left| \sum_p f_{nju}^{rp} * \sum_q f_{nk\mu}^{sq}(x) \right|^2 dx :$$

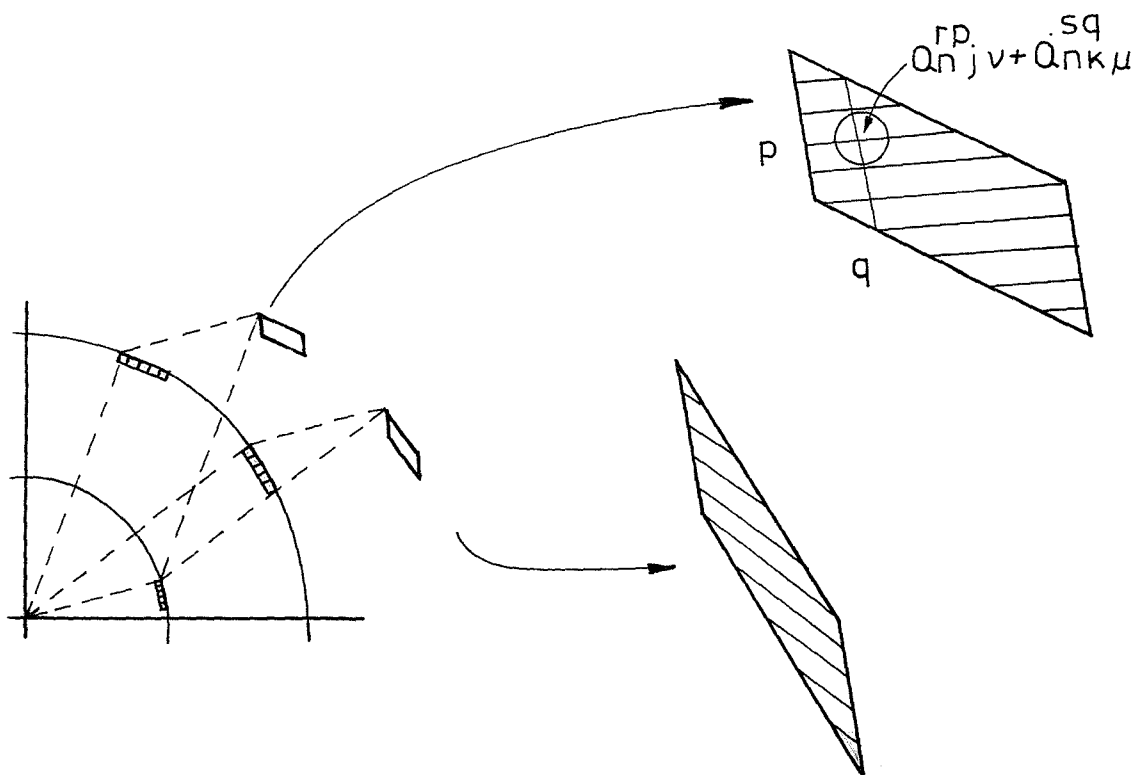
$$\delta^{-1/2} \sum_{rs} \sum_{pp'} \sum_{qq'} \int (f_{nju}^{rp} * f_{nk\mu}^{sq}) \cdot (f_{nju}^{rp'} * f_{nk\mu}^{sq'})(x) dx \leq$$

$$.10 \leq \delta^{-1/2} \sum_{rs} \sum_{pp'} \sum_{qq'} |E(pp', qq', rs)| \|f_{nju}^{rp}\|_2^2 \|f_{nk\mu}^{sq}\|_2^2 \|f_{nju}^{rp'}\|_2^2 \|f_{nk\mu}^{sq'}\|_2^2 =$$

donde hemos puesto

$$E(pp', qq', rs) = (Q_{nju}^{rp} + Q_{nk\mu}^{sq}) \cap (Q_{nju}^{rp'} + Q_{nk\mu}^{sq'})$$

En el plano las sumas $Q_{nju}^{rp} + Q_{nk\mu}^{sq}$ están distribuídas formando un paralelogramo, en el cual $Q_{nju}^{rp} + Q_{nk\mu}^{sq}$ estará dentro de un cuadrado de lado 2δ cuyo centro está sobre un segmento paralelo a la diagonal, tal como representamos en la figura



Dos sumas $Q_{n_j \nu}^{rp} + Q_{n_k \mu}^{sq}$ $Q_{n_j \nu}^{rp'} + Q_{n_k \mu}^{sq'}$ estarán en el mismo segmento si y sólo si $p + q = p' + q'$ luego en un mismo segmento habrá $p + q =$ sumas distintas.

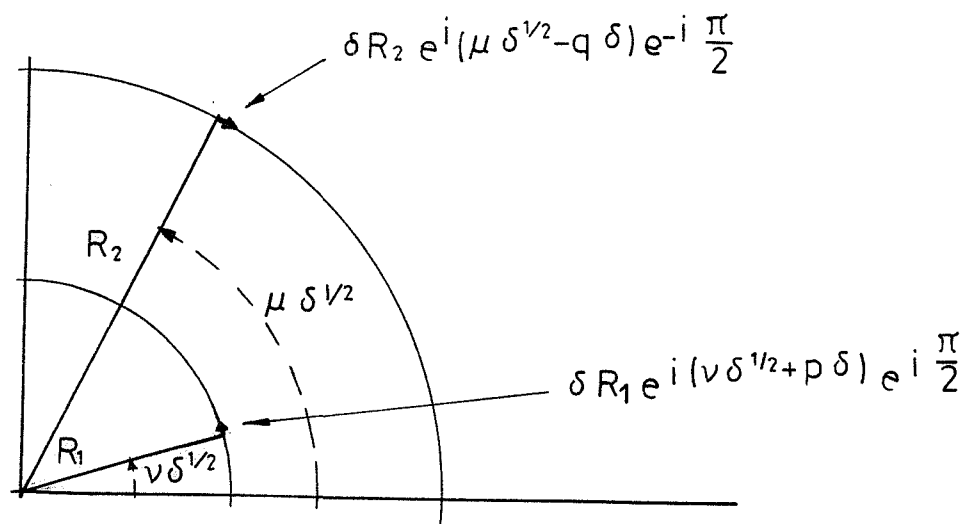
Al estar las direcciones angulares uniformemente espaciadas, las sumas que estén sobre un mismo segmento se solapan como mucho un número finito de veces con las sumas que estén sobre otro segmento. Sin embargo sobre un mismo segmento no hay solapamiento acotado y éste aumenta al acercando las direcciones angulares ν, μ

Para medir el solapamiento de las sumas que están sobre el mismo segmento, observemos que si $Q_{n_j \nu}^{rp} + Q_{n_k \mu}^{sq}$ $Q_{n_j \nu}^{r, p+1} + Q_{n_k \mu}^{s, q-1}$ son dos sumas consecutivas de ese tipo, el centro de la segunda suma se obtiene añadiendo al centro

de la primera el vector

$$\delta R_1 e^{i(\nu\delta^{1/2}+p\delta)} e^{i\frac{\pi}{2}} + \delta R_2 e^{i(\mu\delta^{1/2}-q\delta)} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

siendo R_1 , R_2 las distancias de $Q_{nj\nu}^{rp}$, $Q_{nk\mu}^{sq}$ al eje
como respectivamente, tal como se ve en la figura



Como $R_1 \simeq R_2 \simeq 2^n$ a distancia entre dos centros consecutivos es

$$d = 2^n \delta (|\nu-\mu| \delta^{1/2} + |p-q| \delta)$$

como $|p-q| \leq \delta^{-1/2}$

$$d \leq 2^n \delta^{3/2} (|\nu-\mu| +$$

Si una suma está entre dos centros más lejos de otra, con un sencillo argumento geométrico se ve que en el plano

la común intersección es como mucho

$$\delta^2 2^{2n} (1 - \delta^{1/2} (|v-\mu| + 1)N)$$

Por consiguiente, siguiendo los cálculos similares de Tomas en [32] si escribimos para p

$$N_{v0} = \min \{ \rho, \delta^{-1/2} (|v-\mu| + 1)^{-1} \}$$

$$a(N) = (\delta^{-1/2} (|v-\mu| + 1)^{-1} - N) \quad \text{para } 0 < N < N_{v0}$$

$$a(N) = \quad \text{en otro caso}$$

tendremos

$$|E(pp', qq', rs)| \leq C \delta^{7/2} 2^{2n} (|v-\mu| + 1) a(|p-p'|)$$

$$p + q = p' + q$$

$$|E(pp', qq', rs)| = 0 \quad p + q \neq p' + q$$

De este modo la expresión 3.10 es

$$I \leq C \delta^{7/2} 2^{3n} (|v-\mu|+1) \sum_{p=1}^{\delta^{-1/2}} \sum_{p+q=\rho=p'+q'} a(|p-p'|) \|f_{njv}^{rp}\|_2 \|f_{njv}^{rp'}\|_2 \|f_{nk\mu}^{sq}\|_2 \|f_{nk\mu}^{sq'}\|_2$$

Pongamos

$$g(p, r, s) = \|f_{njv}^{rp}\|_2 \|f_{nk\mu}^{s, \rho-p}\|_2$$

$$h(p', r, s) = \|f_{njv}^{rp'}\|_2 \|f_{nk\mu}^{s, \rho-p'}\|_2$$

entonces

$$\leq C \delta^{-1/2} \delta^{7/2} 2^{3n} \sum_{rs} (|v-\mu|+1) \sum_{\rho} \sum_{|p-p'| \leq N_{\rho}} a(|p-p'|) g(p,r,s) h(p',r,s)$$

como

$$\sum_{|p-p'| \leq N_{\rho}} a(|p-p'|) g(p,r,s) h(p',r,s) \leq 2 \sum_{p=1}^{\rho} \sum_{p'=p}^{N_{\rho}} a(|p'-p|) g(p,r,s) h(p',r,s) \leq$$

$$\left(\sum_{p=1}^{\rho} |g(p,r,s)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{p=1}^{\rho} \left(\sum_{p'=p}^{\rho} a(|p'-p|) |h(p',r,s)|^2 \right)^{1/2} \right)^{1/2}$$

$$\left(\sum_{p=1}^{\rho} |g(p,r,s)|^2 \right)^{1/2} \sum_{\ell=0}^{\rho-1} \left(\sum_{p=1}^{\rho-p-1} |a(\ell)|^2 |h(p+\ell,r,s)|^2 \right)^{1/2} =$$

$$\left(\sum_{p=1}^{\rho} |g(p,r,s)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\ell=0}^{\rho-1} |a(\ell)| \right) \left(\sum_{p=1}^{\rho-p-1} |h(p+\ell,r,s)|^2 \right)^{1/2} =$$

$$\left(\sum_{p=1}^{\rho} |g(p,r,s)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\ell=0}^{\rho-1} |a(\ell)| \right) \left(\sum_{p'=\ell+1}^{\rho} |h(p',r,s)|^2 \right)^{1/2}$$

Pero

$$\sum_{\ell=0}^{\rho-1} |a(\ell)| \leq \sum_{\ell=0}^{N_{\rho}} (\delta^{-1/2} (|v-\mu|+1)^{-1} - \ell) \frac{C}{(\delta^{1/2} (|v-\mu|+1))^2}$$

Luego queda

$$I \leq C \delta^3 2^{3n} \delta^{-1} (|v-\mu|+1)^{-1} \sum_{rs} \sum_{\rho} \sum_{p=1}^{\rho} \left(|g(p,r,s)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{p'=1}^{\rho} |h(p',r,s)|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C \delta^2 2^{3n} (|v-\mu|+1)^{-1} \left(\sum_{rs} \sum_{p=1}^{\rho} |g(p,r,s)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{rs} \sum_{p'=1}^{\rho} |h(p',r,s)|^2 \right)^{1/2}$$

siendo

$$\sum_{rs\rho} \sum_{p=1}^{\rho} g(p,r,s)^2 = \sum_{rs\rho} \sum_{p=1}^{\rho} \|f_{nj\cup}^{rp}\|_2^2 \|f_{nk\mu}^{s,\rho-p}\|_2^2$$

$$\leq \sum_{r=1}^{\delta^{-1/2}} \sum_{p=1}^{\delta^{-1/2}} \|f_{nj\cup}^{rp}\|_2^2 \sum_{s=1}^{\delta^{-1/2}} \sum_{p'=1}^{\delta^{-1/2}} \|f_{nk\mu}^{sp'}\|_2^2 = \|f_{nj\cup}\|_2^2 \|f_{nk\mu}\|_2^2$$

y lo mismo vale para $\sum_{rs\rho} \sum_{p'=1}^{\rho} |h(p',r,s)|^2$
con lo que

$$I \leq C \frac{\delta^2 2^{3n}}{|v-\mu|+1} \|f_{nj\cup}\|_2^2 \|f_{nk\mu}\|_2^2$$

(c) Vamos a acotar ahora

$$(2) \quad \sum_{\substack{n,m \in \Delta \\ n \neq m}} = \sum_{n,m \in \Delta} \frac{1}{2^{3n}} \frac{1}{2^{3m}} \int \left| \sum_{j\cup} f_{nj\cup} * \sum_{k\mu} f_{nk\mu}(x) \right|^2 dx$$

en este caso, al ser $2^m \leq \delta 2^n$ es

$$\text{sop}(f_{nj\cup} * \sum_{k\mu} f_{mk\mu}) \cap \text{sop}(f_{nj'\cup'} * \sum_{k\mu} f_{mk\mu})$$

excepto para $(j,\cup) = (j',\cup')$

Entonces

$$(2) \quad \sum_{\substack{n,m \in \Delta \\ n \neq m}} \leq C \sum_{n,m \in \Delta} \frac{1}{2^{3n}} \frac{1}{2^{3m}} \sum_{j\cup} \int |f_{nj\cup} * \sum_{k\mu} f_{mk\mu}(x)|^2 dx =$$

$$C \sum_{\substack{n,m \in \Delta \\ n \neq m}} \frac{1}{2^{3n}} \frac{1}{2^{3m}} \sum_{j\cup} \int |\hat{f}_{nj\cup}(\xi)|^2 \cdot \left| \sum_{k\mu} \hat{f}_{mk\mu}(\xi) \right|^2 d\xi =$$

$$\begin{aligned}
& C \int \left(\sum_{n \in \Delta} \sum_{j \cup} \frac{1}{2^{3n}} |\hat{f}_{nj\cup}(\xi)|^2 \right) \left(\sum_{m \in \Delta} \frac{1}{2^{3m}} \left| \sum_{k \cup} \hat{f}_{mk\cup}(\xi) \right|^2 \right) d\xi \leq \\
& \leq C \left(\int \left(\sum_{nj\cup} \frac{1}{2^{3n}} |\hat{f}_{nj\cup}(\xi)|^2 \right)^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int \sum_m \frac{1}{2^{3m}} \left| \sum_{k \cup} \hat{f}_{mk\cup}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \leq \\
& \quad \left(\sum_{(3)} \right)^{1/2} \left(\sum_{(1)} + \sum_{(2)} \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

donde hemos puesto

$$\begin{aligned}
\sum_{(3)} &= \int \left(\sum_{nj\cup} \frac{1}{2^{3n}} |\hat{f}_{nj\cup}(\xi)|^2 \right)^2 d\xi : \\
\sum_{n, n' \in \Delta} \sum_{jj'} \sum_{\cup\cup'} \frac{1}{2^{3n}} \frac{1}{2^{3n'}} \int |f_{nj\cup} * f_{n'j'\cup'}(x)|^2 dx &= \\
\sum_{(1)} + \sum_{n \neq n'} \sum_{jj'} \sum_{\cup\cup'} \frac{1}{2^{3n}} \frac{1}{2^{3n'}} \int |f_{nj\cup} * f_{n'j'\cup'}(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

$$\text{y si} \quad \leq n + |\log_2 \delta|$$

$$.12 \quad \int |f_{nj\cup} * f_{n'j'\cup'}(x)|^2 dx \leq C \delta^2 2^{3n'} \|f_{nj\cup}\|_2^2 \|f_{n'j'\cup'}\|_2^2$$

pues si: $f_{nj\cup} = \sum_{sp} f_{nj\cup}^{sp}$ como en el lema 3.8, será

$$\text{sop}(f_{nj\cup}^{sp} * f_{n'j'\cup'}) \cap \text{sop}(f_{nj\cup}^{s'p'} * f_{n'j'\cup'}) = \emptyset$$

cuando $(s, p) \neq (s', p')$

y por tanto

$$\int |f_{nj\cup} * f_{n'j'\cup'}|^2 dx \leq C \sum_{sp} \int |f_{nj\cup}^{sp} * f_{n'j'\cup'}(x)|^2 dx$$

$$\leq C \sum_{sp} \|f_{njU}^{sp} * f_{n',j',U'}\|_{\infty}^2 |\text{sop}(f_{njU}^{sp} * f_{n',j',U'})| \leq$$

$$\leq C \sum_{sp} \|f_{njU}^{sp}\|_2^2 \|f_{n',j',U'}\|_2^2 \delta^2 2^{3n'} = C \delta^2 2^{3n} \|f_{njU}\|_2^2 \|f_{n',j',U'}\|_2^2$$

luego

$$\sum_{(3)} \leq \sum_{(1)} + C \sum_{n' \leq n} \sum_{jj'} \sum_{UU'} \frac{1}{2^{3n}} \frac{1}{2^{3n'}} \delta^2 2^{3n'} \|f_{njU}\|_2^2 \|f_{n',j',U'}\|_2^2$$

y al ser

$$\|f_{njU}\|_2^2 \leq |\text{sop}(f_{njU})|^{1/2} \|f_{njU}\|_4^2 = (\delta^2 2^{3n})^{1/2} \|f_{njU}\|_4^2$$

queda

$$\sum_{(3)} \leq \sum_{(1)} + C \sum_{n' \leq n} \delta^4 2^{-|n-n'|} \sum_{jj'} \sum_{UU'} \|f_{njU}\|_4^2 \|f_{n',j',U'}\|_4^2 \leq$$

$$\leq \sum_{(1)} + C \delta^4 \delta^{3/2} \left(\sum_{n,j,U} \|f_{njU}\|_4^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n',j',U'} \|f_{n',j',U'}\|_4^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sum_{(1)} + C \delta^4 \delta^{3/2} \delta^{-1} \left(\sum_{n,j,U} \|f_{njU}\|_4^4 \right)^{1/2} \left(\sum_{n',j',U'} \|f_{n',j',U'}\|_4^4 \right)^{1/2} =$$

$$\sum_{(1)} + C \delta^{9/2} \|f\|_4^4$$

Introduciendo la expresión de \sum_3 en 3.9

$$\sum_{(2)} \leq C \left(\sum_{(1)} + C \delta^{9/2} \|f\|_4^4 \right)^{1/2} \left(\sum_{(1)} + \sum_{(2)} \right)^{1/2}$$

y como

$$\sum_{(1)} \leq C \delta^3 |\log \delta| \|f\|_4^4$$

será

$$3.13 \quad \sum_{(2)} \leq C \delta^3 |\log \delta| \|f\|_4^4$$

Finalmente a partir de 3.6, 3.8 y 3.13 obtenemos

$$\|T_\delta \hat{f}\|_4 \leq C |\log \delta|^{1/2} \delta^{3/4} \|f\|_4 \quad \blacksquare$$

El siguiente ejemplo demuestra que el teorema 3.4 es el mejor posible, en el sentido de que es inevitable una potencia del logaritmo en el segundo miembro de 3.5

.14 Ejemplo

Tal como hacíamos en el Lema 2.2, dividimos el anillo Γ_0^* en $\delta^{-1/2}$ bloques T_j , siendo T_j el bloque de altura 1, anchura $\delta^{-1/2}$ y profundidad δ adaptado a la superficie del cono que se encuentra en la dirección angular $\delta^{1/2}j$.

Sea ϕ_j la función característica de T_j entonces

$$\int_{\Gamma_0^*} \left| \sum_j \hat{\phi}_j(\xi) \right|^4 d\xi = \int \left| \sum_{j,k} \hat{\phi}_j(\xi) \cdot \hat{\phi}_k(\xi) \right|^2 d\xi =$$

$$\int \left| \sum_{j,k} \phi_j(x) * \phi_k(x) \right|^2 dx \simeq \sum_{j,k} \int |\phi_j * \phi_k(x)|^2 dx$$

ya que $\phi_j * \phi_k$ tienen soportes casi disjuntos.

Observemos que $\phi_j * \phi_k(x)$ es máxima en al menos la mitad de su soporte, siendo

$$\|\phi_j * \phi_k\|_{\infty} \simeq \frac{\delta^{3/2}}{|j-k| + 1}$$

$$|\text{supp}(\phi_j * \phi_k)| \simeq \delta^{3/2} (|j-k| + 1)$$

luego

$$\int |\phi_j * \phi_k(x)|^2 dx \geq c \frac{\delta^{3+3/2}}{|j-k| + 1}$$

$$\int_{\Gamma_0^*} \left| \sum_j \hat{\phi}_j(\xi) \right|^4 d\xi \geq c \delta^{3+3/2} \sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{\delta^{-1/2}}{|j-k|+1} = c \delta^{3+3/2} \delta^{-1/2} |\log \delta|$$

mientras que

$$\left\| \sum_j \phi_j \right\|_4^4 = \int_{\Gamma_0^*} \left| \sum_j \phi_j \right|^4 dx \simeq c \delta$$

luego

$$\int_{\Gamma_0^*} \left| \sum_j \hat{\phi}_j(\xi) \right|^4 d\xi \geq c \delta^3 |\log \delta| \left\| \sum_j \phi_j \right\|_4$$

Tomando pues $f = \sum_j \phi_j$ hemos obtenido

$$\|T_{\delta} \hat{f}\|_4 \geq c \delta^{3/4} |\log \delta|^{1/4} \|f\|_4 \quad \blacksquare$$

Señalemos que afinando más en la demostración del teorema 3.4 llegaríamos a

$$\|T_{\delta} \hat{f}\|_4 \leq C \delta^{3/4} |\log \delta|^{1/4} \|f\|_4$$

para toda función $f \in L^4(\mathbb{R}^3)$, $\frac{1}{4}$ es pues la potencia justa de $|\log \delta|$ que debe aparecer en 3.5

UN TEOREMA DE RESTRICCIÓN PARA SERIES DE FOURIER DOBLES.-

Sea $\xi = (x, y)$ un punto del toro de dimensión dos $T^2 = [0, 1) \times [0, 1)$ y $\mu = (m, n)$ un punto del retículo de pares de coordenadas enteras.

Si f es una función integrable sobre T^2 consideremos su serie de Fourier doble

$$\sum_{\mu} c_{\mu} e^{2\pi i \mu \cdot \xi}$$

donde

$$\int_{T^2} f(\xi) e^{-2\pi i (\mu \cdot \xi)} d\xi$$

$\mu \cdot \xi = mx + ny$ $d\xi$ la medida de Lebesgue en T^2 .

Sea ahora $\mathcal{T} = \{T_n\}$ una familia de circunferencias en el plano, de tal forma que, si enumeramos sus radios en orden creciente $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$

se cumpla

$$\frac{R_{n+1}}{R_n^2} \geq A >$$

para todo es decir, que cada radio sea mayor o igual que el cuadrado del anterior.

Esta condición significa que las circunferencias están muy espaciadas, más que en el caso lacunar. El caso lacunar puede interpretarse como de radios diádicos $R_n = 2^n$ mientras que la condición 3.15 es del tipo $R_n = 4^n \cdot 2^{2^n}$

Dada una función de cuadrado integrable sabemos por la identidad de Parseval que

$$\sum_{\mu} |c_{\mu}|^2)^{1/2} = \|f\|_2$$

El teorema 3.16 prueba que si en vez de tomar todas las frecuencias de la suma anterior tomamos sólo las que están sobre \mathcal{T} , podemos cambiar $\|f\|_2$ por otra norma más pequeña, $\|f\|_{4/3}$.

3.16 Teorema

Dada la familia \mathcal{T} que cumpla la condición 3.15, si $f \in L^p(T^2)$ \vee $\sum c_{\mu} e^{2\pi i(\mu \cdot \xi)}$ es su serie de

Fourier asociada, se tiene

$$\left(\sum_{\mu \in \mathbb{T}} |c_{\mu}|^q \right)^{1/q} \leq c_p \|f\|_p$$

para $\frac{4}{3} \leq p \leq 4$ $q = \frac{1}{2} \frac{p}{p-1}$

Demostración

Vamos a probar

$$3.18 \quad \left(\sum_{\mu \in \mathbb{T}} |c_{\mu}|^2 \right)^{1/2} \leq c \|f\|_{4/3}$$

Esta estimación y la trivial tomando $q = \infty$, $p =$ nos dan 3.17 por el teorema de interpolación de Riesz.

Demostrar 3.18 es equivalente a demostrar su acotación dual, que será la que de la continuidad del operador

$$l^2 \longrightarrow L^4(\mathbb{R}^2)$$

definido por

$$(c_{\mu})_{\mu \in \mathbb{T}} = \sum_{\mu \in \mathbb{T}} c_{\mu} e^{-2\pi i \mu \cdot \xi}$$

3.18 equivale entonces a

$$3.19 \quad \left(\int_{\mathbb{Q}} \left| \sum_{\mu \in \mathbb{T}} c_{\mu} e^{-2\pi i \mu \cdot \xi} \right|^4 d\xi \right)^{1/4} \leq c \left(\sum_{\mu \in \mathbb{T}} |c_{\mu}|^2 \right)^{1/2}$$

Introducimos un poco de notación para remarcar más la situación geométrica. Llamaremos T_n a la circunferencia de radio R_n con lo que $T = \bigcup_n T_n$. $\mu(n)$ serán los puntos del retículo que están en T_n . Tomemos también los coeficientes c_μ que estén sólo en el primer cuadrante, lo que únicamente afecta en multiplicar por la constante π de 3.19

$$\begin{aligned} \int_{T^2} \left| \sum_{\mu \in T} c_\mu e^{-2\pi i \mu \cdot \xi} \right|^4 d\xi &= \int_{T^2} \left| \sum_n \sum_{\mu(n) \in T_n} c_{\mu(n)} e^{-2\pi i \mu \cdot \xi} \right|^4 d\xi = \\ &= \int_{T^2} \left| \left(\sum_n \sum_{\mu(n) \in T_n} c_{\mu(n)} e^{-2\pi i \mu(n) \cdot \xi} \right) \left(\sum_m \sum_{\nu(m) \in T_m} \overline{c_{\nu(m)}} e^{2\pi i \nu(m) \cdot \xi} \right) \right|^2 d\xi = \\ &= \int_{T^2} \sum_{n_1, n_2} \sum_{m_1, m_2} \sum_{\substack{\mu(n_1), \nu(m_1) \\ \rho(n_2), \delta(m_2)}} c_{\mu(n_1)} \overline{c_{\nu(m_1)}} c_{\rho(n_2)} \overline{c_{\delta(m_2)}} \cdot \\ &\quad e^{2\pi i (\nu(m_1) + \rho(n_2) - \mu(n_1) - \delta(m_2)) \cdot \xi} d\xi = \end{aligned}$$

$$3.20 \quad = \sum_{\substack{n_1, n_2 \\ m_1, m_2}} \sum_{\mu(n_1) + \delta(m_2) = \rho(n_2) + \nu(m_1)} c_{\mu(n_1)} \overline{c_{\nu(m_1)}} c_{\rho(n_2)} \overline{c_{\delta(m_2)}} = (A)$$

La segunda suma toma todos los coeficientes $\mu(n_1) \in T_{n_1}$, $\delta(m_2) \in T_{m_2}$, $\rho(n_2) \in T_{n_2}$, $\nu(m_1) \in T_{m_1}$ tales que

$$\mu(n_1) + \delta(m_2) = \rho(n_2) + \nu(m_1)$$

pero al estar los radios R_n muy espaciados esta relación no puede verificarse a no ser que

$$n_1 = n_2 \quad m_1 = m_2$$

o que $n_1 = m_1$ y $n_2 = m_2$.

Luego poniendo $n_2 = m_1 = m_2 = m$

3.20 queda

$$\begin{aligned}
 3.21 \quad (A) &\leq 2 \left| \sum_{n,m} \sum_{\mu(n)+\delta(m)=\rho(n)+v(m)} c_{\mu(n)} \bar{c}_{v(m)} c_{\rho(n)} \bar{c}_{\delta(m)} \right| = \\
 &\leq 2 \left| \sum_n \sum_{\mu(n)+\delta(n)=\rho(n)+v(n)} c_{\mu(n)} \bar{c}_{\delta(n)} c_{v(n)} \bar{c}_{\rho(n)} \right| + \\
 &+ 2 \left| \sum_{n \neq m} \sum_{\mu(n)+\delta(m)=\rho(n)+v(m)} c_{\mu(n)} \bar{c}_{v(m)} c_{\rho(n)} \bar{c}_{\delta(m)} \right| = \\
 &= 2 \left(\sum_{(1)} + \sum_{(2)} \right)
 \end{aligned}$$

Utilizaremos los dos lemas siguientes

3.22 Lema 1 ([35])

Dados tres puntos distintos λ, μ, v situados sobre la circunferencia de radio R se tiene

$$3.23 \quad |\lambda - \mu| \quad |\mu - v| \quad |v - \lambda| \geq 2 R$$

Demostración

Es consecuencia de un teorema de geometría elemental, que afirma que si un triángulo de lados a, b, c tiene área S es el radio de circunferencia circunscrita al triángulo, entonces

$$R = \frac{abc}{4S}$$

En nuestro caso, a, b, c son los factores a
 a izquierda de 3.23 y ponemos

$$l_1 + i l_2 = m_1 + i m_2 + n_1 + i n_2$$

será

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & l_2 \\ 1 & m_1 & m_2 \\ 1 & n_2 \end{vmatrix} \geq \frac{1}{2}$$

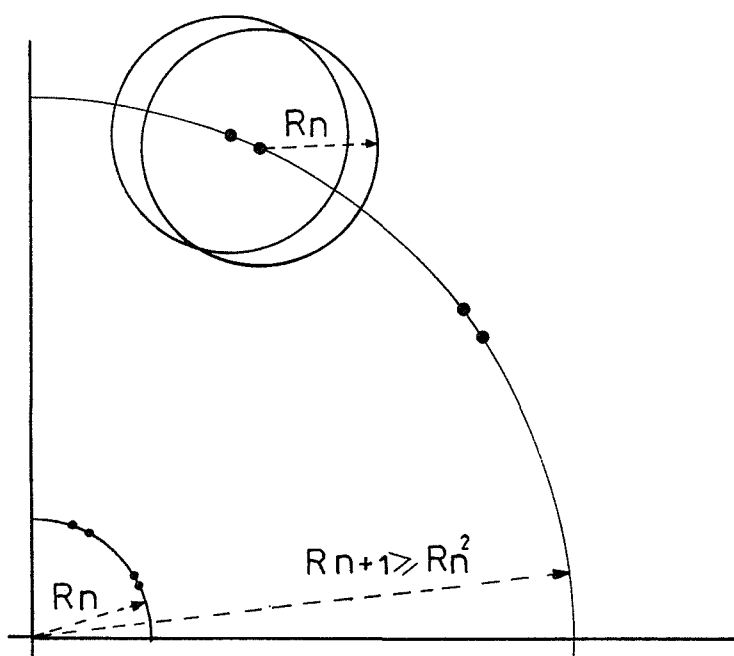
o que prueba el lema. \blacksquare

3.24 Lema

Una circunferencia tiene como mucho dos cuerdas
 de la misma longitud y dirección. \blacksquare

El lema 3.22 dice que si dos puntos del retícu-
 lo sobre T_n distan menos de $R_n^{1/2}$ cualquier otro pun-
 to de coordenadas entonces sobre T_n , de existir, deberá
 estar a una distancia mayor que $R_n^{1/2}$ de ambos.

Si a un punto $\mu(n)$ de T_n le sumamos otro
 cualquiera de T_m , si $m \leq n$ la suma está como mu-
 cho a una distancia $R_n^{1/2}$ de $\mu(n)$.



Luego si por ejemplo $m \leq n$ fijados $\mu(n), \delta(m)$,
sea

$$\mu(n) + \delta(m)$$

como consecuencia del Lema 3.22, como mucho habrá un único $\rho(n)$ dependiente de $\mu(n)$ y un único $v(m)$ dependiente de $\mu(n)$ y de $\delta(m)$, tales que aparte de la solución trivial de tomar $\rho(n) = \mu(n), v(m) = \delta(m)$, verifiquen la relación

$$\mu(n) + \delta(m) = \rho(n) + v(m)$$

Como es

$$|c_\mu \bar{c}_v| \leq |c_\mu|^2 + |c_v|^2$$

quedará entonces

$$\sum_{\substack{\mu, \rho \in T_n \\ \nu, \delta \in T_m \\ \mu + \delta = \rho + \nu}} c_{\mu(n)} \bar{c}_{\nu(m)} c_{\rho(n)} \bar{c}_{\delta(m)}$$

$$\leq 9 \sum_{\substack{\mu(n) \in T_n \\ \nu(m) \in T_m}} |c_{\mu(n)}|^2 |c_{\nu(m)}|^2$$

Por tanto

$$3.25 \quad \frac{\Sigma}{2} = \left| \sum_{n \neq m} \sum_{\mu(n) + \delta(m) = \rho(n) + \nu(m)} c_{\mu(n)} \bar{c}_{\nu(m)} c_{\rho(n)} \bar{c}_{\delta(m)} \right| \leq$$

$$9 \sum_{n, m} \sum_{\substack{\mu(n) \in T_n \\ \nu(m) \in T_m}} |c_{\mu(n)}|^2 |c_{\nu(m)}|^2 = 9 \left(\sum_n \sum_{\mu(n) \in T_n} |c_{\mu(n)}|^2 \right)^2$$

Por otra parte, como consecuencia del lema 3.24

la relación

$$\mu(n) + \delta(n) = \rho(n) + \nu(n)$$

sólo es posible en un sólo cuadrante s. $\mu(n) = \rho(n)$

$\nu(n) = \delta(n)$ por consiguiente

$$3.27 \quad \frac{\Sigma}{(1)} = \sum_n \sum_{\mu(n) + \delta(n) = \rho(n) + \nu(n)} c_{\mu(n)} \bar{c}_{\rho(n)} c_{\nu(n)} \bar{c}_{\delta(n)}$$

$$\sum_n \sum_{\mu(n), \nu(n)} |c_{\mu(n)}|^2 |c_{\nu(n)}|^2 = \sum_n \left(\sum_{\mu(n) \in T_n} |c_{\mu(n)}|^2 \right)^2 \leq$$

$$\sum_{\substack{n \\ \mu(n) \in T_n}} |c_\mu|^2$$

Finalmente en virtud de 3.25 y 3.26 queda

$$\left(\int_{T^2} \left| \sum_{\mu \in \Lambda} e^{-2\pi i \mu \cdot \xi} \right|^4 d\xi \right)^{1/4}$$

$$\left(\sum_{(1)} + \sum_{(2)} \right)^{1/4} \leq c \left(\sum_{\mu \in \Lambda} |c_\mu|^2 \right)^{1/2}$$

C A P I T U L O I V

Dada la curva en el plano $\gamma(t) = (t, t^k)$, con $k \geq 2$, en un entorno del origen, A. Ruiz [22] y P. Sjölin [23] estudiaron la restricción

$$4.1 \quad \|\hat{f}\|_{L^q(\gamma)} \leq c_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

quedando como un problema abierto el caso $p' = \frac{p}{k+1}$
 $1 \leq p' \leq 2k$ (véase la pág. 43)

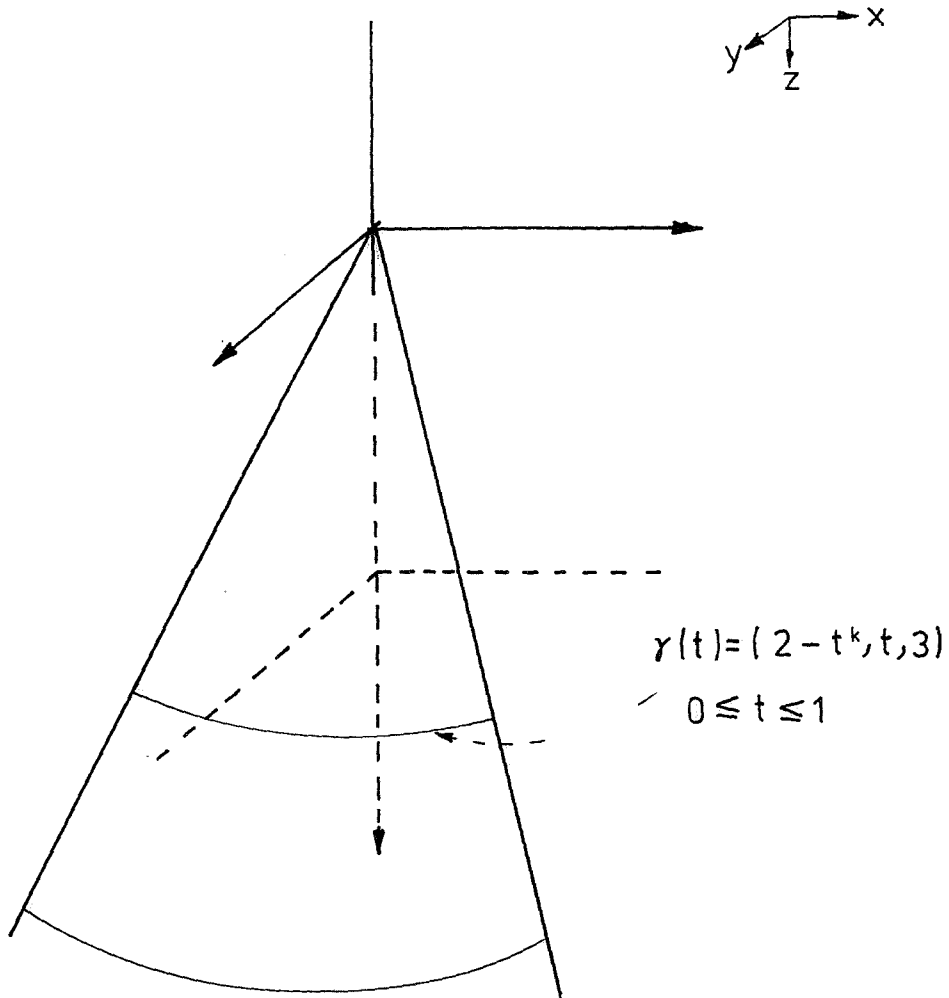
En el teorema 4.3 damos una respuesta completa a esta cuestión que es de hecho un resultado más general, pues en realidad la demostración prueba la desigualdad 4.1 para toda curva que tenga un contacto de orden $k-1$ con su tangente en el origen.

Así como el cono circular aparece como una generalización de la circunferencia, un "cono" cuyas secciones por un plano perpendicular a su eje sean como la curva (t, t^k) aparecerá a la vez como generalización de esta curva y del cono cuadrático.

Para fijar ideas, aunque no tiene por qué ser necesariamente éste, construiremos el cono Γ de sección (t, t^k) tomando la curva

$$-t^k, \quad 0 \leq t \leq 1$$

y uniendo cada punto de esta curva con el origen por una recta que será una generatriz de la nueva superficie tal como se ve en la figura.



Parametrizando en coordenadas cilíndricas, medida de Lebesgue $d\mu(\xi)$ sobre τ será del orden de magnitud de $r \, dr \, d\theta$. Luego salvo constantes podemos suponer que es ésta última la medida de Lebesgue singular sobre τ

Si en el cono de sección $(, t^k)$ se cumple la restricción

$$4.2 \quad \left(\int_{\Gamma} |\hat{f}(\xi)|^q d\sigma(\xi) \right)^{1/q} \leq c_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

siendo $d\sigma(\xi)$ como la medida de Lebesgue en el tronco de cono Γ_0 formado por los puntos de Γ de altura $1 \leq z \leq 2$, probaremos que necesariamente $q \leq \frac{p'}{k+1}$ (proposición 4.32) y que hay que tomar en 4.2 la medida

$$d\sigma(\xi) = r^\alpha dr d\theta$$

siendo $\alpha = \frac{3q}{p'} -$ (proposición 4.5)

Luego, en el teorema 4.37 y la proposición 4.58 probamos que estas condiciones son además suficientes si $p' \geq 2k$.

LA CURVA $\gamma(t) = t^k$.

4.3 Teorema

Sea la curva $\gamma(t) = (t, t^k)$, $k \geq 2$, en un entorno compacto del origen, entonces para toda función $f \in S(\mathbb{R}^2)$ se verifica

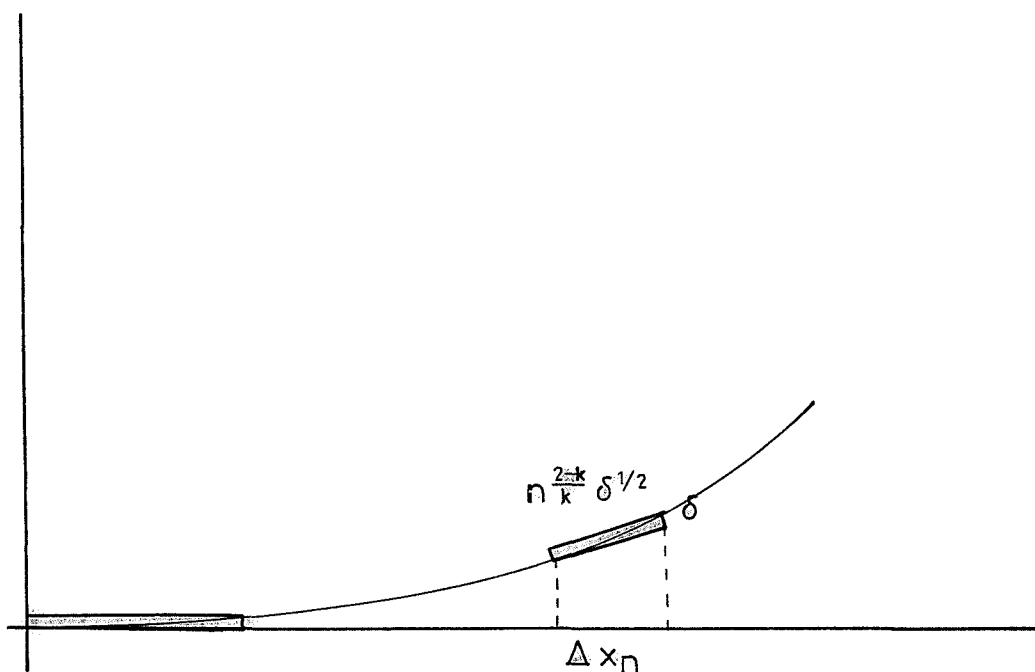
$$4.4 \quad \|\hat{f}\|_{L^q(\gamma)} \leq c_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

para $1 \leq q \leq \frac{p'}{k+1}$ y $p' > \max[4, k+1]$, siendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$

Demostración

Podemos suponer, sin perder generalidad, que la curva es $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Como en el caso del cono, vamos a ensanchar la curva con una anchura δ y dividir el "collar" que resulta en rectángulos adaptados a la curva.

Al ser la curvatura de γ en el origen nula, la geometría de ésta hace que los rectángulos sean cada vez más cortos a medida que nos alejamos del origen.



Numeramos los rectángulos a partir del origen, R_n es el n -ésimo rectángulo y su proyección sobre el eje OX es el segmento $[x_{n-1}, x_n]$, con $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ al ser la curva $g(x) = x^k$, tendremos

$$g(x_{n+1}) = g(x_n) + g'(x_n) \Delta x_n + \frac{g''(x_n)}{2} (\Delta x_n)^2 + o(\Delta x_n)^2$$

haciendo

$$\frac{g''(x_n)}{2} (\Delta x_n)^2$$

obtenemos

$$\Delta x_n = \left(\frac{2\delta}{g''(x_n)} \right)^{1/2} = \left(\frac{2\delta}{k(k-1)x_n^{k-2}} \right)^{1/2} = C x_n^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1/2}$$

Luego tenemos la relación

$$4.5 \quad x_{n+1} - x_n = C x_n^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1/2}$$

Pongamos $x_n = f(n) \delta^\alpha$ en la ecuación anterior, con lo que resulta

$$(f(n+1) - f(n)) \delta^\alpha = C f(n)^{\frac{2-k}{2}} \delta^{\frac{2-k}{k}\alpha} \delta^{1/2}$$

y como esto debe ser cierto para todo

$$\alpha = \frac{2-k}{2}\alpha + \frac{1}{2}$$

es decir

$$= \frac{1}{k}$$

y por tanto de 4.5 obtenemos la ecuación en diferencias

$$f(n+1) - f(n) = C f(n)^{\frac{2-k}{2}}$$

que al ser el primer miembro como la derivada resulta que

asintóticamente

$$f(n) = C n^{2/k}$$

y por tanto $f(n)$, salvo constantes que no dependen de n , es del orden de $n^{2/k}$.

Así pues

$$\Delta x_n \cong x_n^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1/2} \cong n^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1/2} \quad x_n = n^{2/k} \delta^{1/k}$$

y como que el lado largo del rectángulo R_n es como su proyección Δx_n , hemos descompuesto el collar sobre Γ_n en rectángulos R_n de dimensiones $n^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1/k} \times \delta$ que era lo que queríamos.

Observemos que en total tenemos del orden de M rectángulos con δ tal

$$x_M = M^{2/k} \delta^{1/k}$$

es decir, hay $M \cong \delta^{-1/2}$ rectángulos R_n en la descomposición.

Si I_n es el segmento de la curva Γ_n que está en R_n , χ_{I_n} es la función característica de I_n . ϕ_n es la función característica de R_n , teniendo en cuenta que

$$\left| \int_{\gamma} \hat{f}(\xi) \sum_{n=1}^{\delta^{-1/2}} a_n \chi_{I_n}(\xi) d\sigma(\xi) \right| \leq \frac{C}{\delta} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi) \sum_{n=1}^{\delta^{-1/2}} a_n \phi_n(\xi) d\xi \right|$$

$$= \frac{C}{\delta} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(\xi) \sum_{n=1}^{\delta^{-1/2}} a_n \hat{\phi}_n(\xi) d\xi \right| \leq \frac{C}{\delta} \|f\|_p \left\| \sum_{n=1}^{\delta^{-1/2}} a_n \hat{\phi}_n(\xi) \right\|_p,$$

$$\text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'},$$

resulta que para probar 4.3 es suficiente con que para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeño se cumpla

$$4.6 \quad \left\| \sum_{n=1}^{\delta^{-1/2}} a_n \hat{\phi}_n(\xi) \right\|_{p'} \leq C\delta \left(\sum_{n=1}^{\delta^{-1/2}} |a_n|^{q'} n^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1/k} \right)^{1/q'}$$

Para ello, al ser $\delta > 0$

$$4.7 \quad \left\| \sum_{n=1}^{\delta^{-1/2}} a_n \hat{\phi}_n(\xi) \right\|_{p'} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_n a_n \hat{\phi}_n(\xi) \cdot \sum_m a_m \hat{\phi}_m(\xi) \right|^{p'/2} d\xi \right)^{\frac{2 \cdot 1}{p' \cdot 2}}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_{nm} a_n a_m \phi_n(x) * \phi_m(x) \right|^s dx \right)^{\frac{1 \cdot 1}{s \cdot 2}}$$

$$\text{con } \frac{1}{s} + \frac{2}{p'} =$$

Pero ahora $\text{sop}(\phi_n * \phi_m)$ tienen un solapamiento finito al ir variando n, m (puede verse esto como un caso particular del lema 4.53), con lo cual, aplicando los lemas 4.8 4.12, la expresión 4.7 es

$$\begin{aligned}
& C \left(\sum_{nm} |a_n|^s |a_m|^s \int |\phi_n * \phi_m(x)|^s dx \right)^{\frac{1}{2s}} \\
& C \left(\sum_{nm} \frac{|a_n|^s |a_m|^s}{n^{\frac{k-2}{k}} m^{\frac{k-2}{k}}} \frac{\delta^{\frac{k+1}{k}} \delta^{\frac{k+1}{2ks}}}{\left(|n^{\frac{k-2}{k}} - m^{\frac{k-2}{k}}| + 1 \right)^{s-1}} \right)^{1/2s} \\
& C \left(\delta^{\frac{k+1}{k}} \delta^{\frac{k+1}{2ks}} \left(\sum_n |a_n|^{q'} n^{\frac{2-k}{k}} \right)^{1/p_1} \left(\sum_m |a_m|^{q'} m^{\frac{2-k}{k}} \right)^{1/p_1} \right)^{1/2s} = \\
& \left(\delta \left(\sum_n |a_n|^{q'} n^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1/k} \right)^{2/p_1} \right)^{1/2s} \leq C \delta \left(\sum_n |a_n|^{q'} n^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1/k} \right)^{1/q'}
\end{aligned}$$

4.8 Lema

$$4.9 \quad \int_{\mathbb{R}^2} |\phi_n * \phi_m(x)|^s dx \leq C \frac{\delta^{\frac{k+1}{k}} \delta^{\frac{k+1}{2ks}}}{n^{\frac{k-2}{k}} m^{\frac{k-2}{k}} \left(|n^{\frac{k-2}{k}} - m^{\frac{k-2}{k}}| + 1 \right)^{s-1}}$$

Demostración

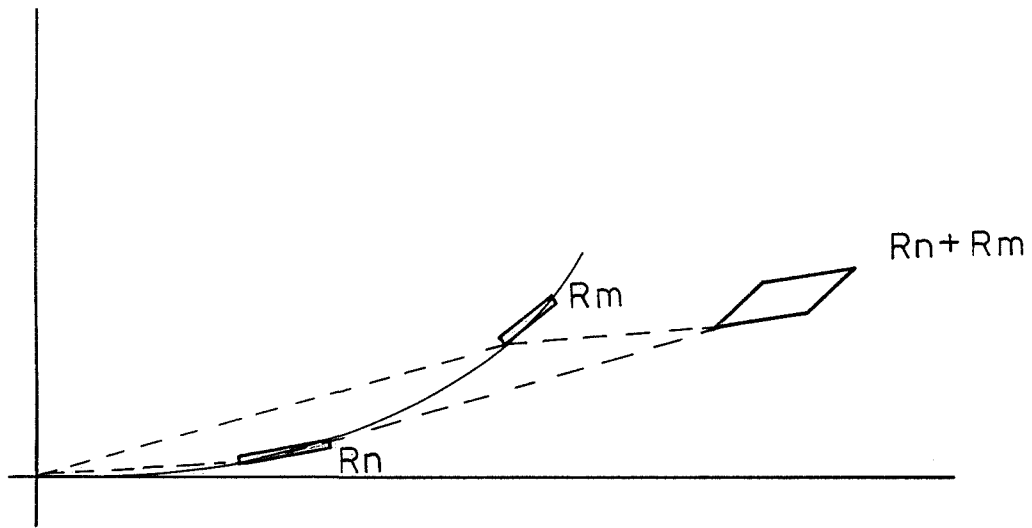
En efecto

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\phi_n * \phi_m(x)|^s dx \leq \|\phi_n * \phi_m\|_{\infty}^s \cdot |\text{sop}(\phi_n * \phi_m)|$$

Para determinar $|\text{sop}(\phi_n * \phi_m)| = |R_n + R_m|$, al ser el grosor de R_n despreciable frente a la longitud de R_m y viceversa, si $n \neq m$ el tamaño de $R_n + R_m$ será más pequeño que dos veces el área del paralelogramo formado por los vectores u_n, u_m donde

$$(\Delta x_n, \Delta y_n)$$

siendo Δy_n la proyección de R_n sobre el eje OY



$$\Delta y_n = \Delta x_n \cdot g'(x_n) = n^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1/k} k x_n^{k-1} \approx n \delta$$

así

$$u_n = (n^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1/k}, n \delta)$$

$$u_m = (m^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1/k}, m \delta)$$

por tanto

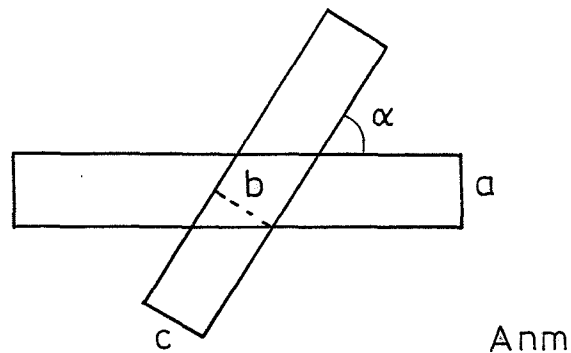
$$4.10 \quad |R_n + R_m| \leq C \begin{vmatrix} n^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1/k} & n \delta \\ m^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1/k} & m \delta \end{vmatrix} = C \delta^{\frac{k+1}{k}} (n^{\frac{2-k}{k}} m - n m^{\frac{2-k}{k}})$$

La máxima intersección A_{nm} de R_n con R_m , $n \neq m$, será

$$A_{nm} \approx ac$$

con
$$= \frac{b}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \frac{\delta}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{|u_1 \times u_2|}{|u_1| \cdot |u_2|} \cong \frac{\delta^{\frac{k+1}{k}} \left| m n^{\frac{2-k}{k}} - n m^{\frac{2-k}{k}} \right|}{\delta^{\frac{2}{k}} m^{\frac{2-k}{k}} n^{\frac{2-k}{k}}} = \delta^{\frac{k-1}{k}} \left| n^{\frac{2k-2}{k}} - m^{\frac{2k-2}{k}} \right|$$



por tanto

4.1
$$A_{nm} \leq \frac{\delta^2}{\operatorname{sen} \alpha} \cong \frac{\delta^{\frac{k+1}{k}}}{\left| n^{\frac{2k-2}{k}} - m^{\frac{2k-2}{k}} \right|}$$

y como

$$\left\| \phi_{njv} * \phi_{mku} \right\|_{\infty} \leq A_{nm}$$

teniendo en cuenta además el caso $m = n$ de 4.10 y 4.1 queda finalmente 4.8. \blacksquare

: Lema

Se tiene la acotación

$$\sum_{nm} \frac{|a_n|^s |a_m|^s}{n^{\frac{k-2}{k}} m^{\frac{k-2}{k}} (|n^{\frac{2k-2}{k}} - m^{\frac{2k-2}{k}}| + 1)^{s-1}} \leq$$

$$\leq C \left(\sum_n |a_n|^{q' n^{\frac{2-k}{k}}} \right)^{1/p_1} \left(\sum_m |a_m|^{q' m^{\frac{2-k}{k}}} \right)^{1/p_1}$$

donde

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{p'}{k+1}, \quad p_1^s = q', \quad q >$$

Demostración

Es una consecuencia de la proposición siguiente,
versión continua del mismo, con

$$\alpha = \frac{k-2}{k} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right), \quad M = \frac{2k-2}{k}, \quad \beta = s-1, \quad p = p_1$$

4.13 Proposición

Dados $f, g \in L^p[0, \infty)$

$$4.14 \quad \left| \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{f(x) g(y)}{x^\alpha y^\alpha (|x^M - y^M| + 1)^\beta} dx dy \right| \leq C \|f\|_p \|g\|_p$$

siempre que

$$+ \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + M\beta + 2\alpha \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}, \quad < \beta < \quad p > \quad , \quad M \geq$$

Demostración

Acotando por $x^M - y^M \geq (x - y)^M$ en el denominador, aplicando la desigualdad de Hölder e integración fraccionaria tal como hacíamos en el lema 2.22 conseguiríamos el mismo resultado con la condición $C < M\beta < \dots$ lo que nos restringe a $p' > 2k$ en el teorema 4.3. Sin embargo, hay que tener en cuenta que la "singularidad" no es $(x - y)^{M\beta}$ sino que, si por ejemplo \dots es entero, sería

$$(x^M - y^M)^\beta = (x - y)^\beta (x^{M-1} + x^{M-2}y + \dots + y^{M-1})^\beta$$

lo que exige $0 < \beta < \dots$ tal como deseamos.

Tomando valores absolutos dentro de la integral en 4.14 podemos suponer que $f(x) \geq 0$ $g(x) \geq 0$ descomponemos la integral en tres trozos

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{f(x) g(y)}{x^\alpha y^\alpha (|x^M - y^M| + 1)^\beta} dx dy = (a) + (b) + (c)$$

donde

$$4.15 \quad (a) \quad \int \int_{y > 2x} \frac{f(x) g(y)}{x^\alpha y^\alpha (|x^M - y^M| + 1)^\beta} dx dy$$

$$4.16 \quad (b) = \int \int_{\frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 2} \frac{f(x) g(y)}{x^\alpha y^\alpha (|x^M - y^M| + 1)^\beta} dx dy$$

$$4.1 \quad (c) = \int \int_{x > 2y} \frac{f(x) g(y)}{x^\alpha y^\alpha (|x^M - y^M| + 1)^\beta} dx dy$$

(c) se acotará de manera parecida a la integral (a), acotemos esta última

$$(a) = \int_1^\infty f(x) h(x) dx \leq \|f\|_{q'} \|h\|_q$$

$$\text{con } \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$$

donde hemos puesto

$$\begin{aligned} 4.18 \quad h(x) &= \int_{2x}^\infty \frac{g(y)}{x^\alpha y^\alpha (|x^M - y^M| + 1)^\beta} dy \leq \frac{1}{x^{2\alpha}} \int_{2x}^\infty \frac{g(y)}{(|x - y|^{M+1})^\beta} dy = \\ &= \frac{1}{x^{2\alpha}} h_1(x) \end{aligned}$$

$h_1(x)$ es de tipo débil (p, q_1)

4.19 Lema

$$\underline{\text{Si}} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} + M\beta \quad \underline{\text{con}} \quad 0 < \beta < \frac{1}{M}, \quad M \geq 1, \quad q_1 < \infty$$

$$\left| \left\{ x \mid h_1(x) > \lambda \right\} \right| \leq C \left(\frac{\|g\|_p}{\lambda} \right)^{q_1}$$

Demostración

Al ser esta desigualdad homogénea podemos suponer que $\|g\|_p = 1$ en tal caso

$$h_1(x) = \int_{2x}^{\infty} \frac{g(y)}{(|x-y|^{M+1})^\beta} dy \leq C \int_{|x-y|>1} \frac{g(y)}{|x-y|^{M\beta}} dy = k * g(x)$$

donde el núcleo

$$k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{t^{M\beta}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Dado un número real μ que luego fijaremos, truncamos el núcleo

$$k = k_1 + k_\infty$$

con

$$k_1 = k \cdot \chi_{[0, \mu]} \quad k_\infty = k \cdot \chi_{(\mu, \infty)}$$

ahora

$$k * g(x) = k_1 * g(x) + k_\infty * g(x)$$

siendo

$$k_\infty * g(x) \leq \|k_\infty\|_p \cdot \|g\|_p = \|k_\infty\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$\|k_{\infty}\|_{p'}^{p'} = \int_{\mu}^{\infty} \frac{dt}{t^{M\beta p'}} \approx \mu^{-M\beta p' + 1}$$

ya que $M\beta p'$ equivale a $q_1 < p$ por tanto haciendo

$$\|k_{\infty}\|_{p'} = \mu^{(-M\beta p' + 1)/p'}$$

será

$$k_{\infty} * g(x) \leq \lambda$$

$$|\{x \mid h_1(x) > 2\lambda\}| \leq |\{x \mid k_1 * g(x) \geq \lambda\}| + |\{x \mid k_{\infty}^* g(x) > \lambda\}| =$$

$$\begin{aligned} 4.20 \quad |\{x \mid k_1 * g(x) > \lambda\}| &\leq \frac{\|k_1 * g\|_p^p}{\lambda^p} \leq \frac{\|k_1\|_1^p \|g\|_p^p}{\lambda^p} \\ &= \frac{\|k_1\|_1^p}{\lambda^p} \end{aligned}$$

pero

$$\|k_1\|_1 = \int_1^{\mu} \frac{dt}{t^{M\beta}}$$

$M\beta > 1$ $\|k_1\|_1 = \text{cte.}$, pero $M\beta > 1$ hace $q_1 < p$
luego $\frac{1}{\lambda^p} \leq \frac{1}{\lambda^{q_1}}$ mientras que si $M\beta \leq 1$ $\|k_1\|_1 \approx \mu^{-M\beta+1}$

$$\frac{\|k_1\|_1^p}{\lambda^p} = \frac{\mu^{-M\beta+1}}{\lambda^p} = \frac{1}{\lambda^{q_1}}$$

ya que

$$\mu^{(-M\beta p' + 1)\frac{1}{p}}, \quad \mu^{-1/q_1} \quad \text{por ser} \quad + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} + M\beta. \quad \square$$

Veamos ahora que $h(x)$ es de tipo débil- (p, q) ,

4.21 Lema

$$\underline{\text{Si}} \quad + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + M\beta + 2\alpha \quad \underline{\text{con}} \quad < \beta < \quad , \quad q <$$

$$M \geq 1$$

$$\{ x \mid h(x) > \lambda \} \mid \leq c \left(\frac{\|g\|_p}{\lambda} \right)^q$$

Demostración

Como en el lema 4.19 suponemos que $\|g\|_p =$
al ser

$$h(x) \leq \frac{1}{x^{2\alpha}} h_1(x)$$

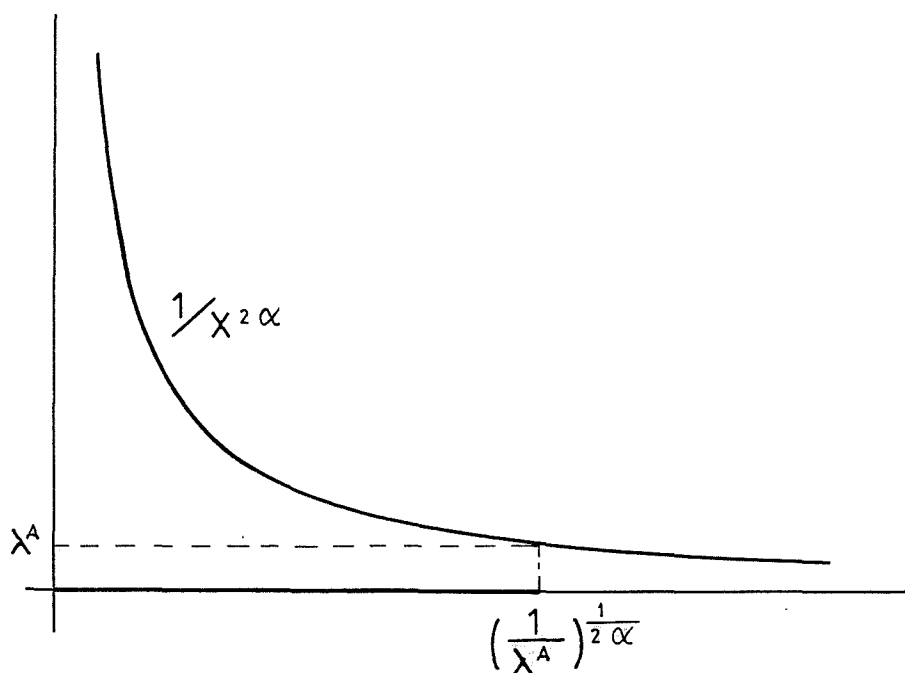
$$A + B =$$

$$\{ x \mid h(x) > \lambda \} \mid \leq \left| \{ x \mid \frac{1}{x^{2\alpha}} > \lambda^A \} \right| + \left| \{ x \mid h_1(x) > \lambda^B \} \right|$$

pero

$$\left| \{ x \mid \frac{1}{x^{2\alpha}} > \lambda^A \} \right| \leq \left(\frac{1}{\lambda^A} \right)^{1/2\alpha}$$

mientras que por el lema 4.19



$$|\{x \mid h_1(x) > \lambda^B\}| \leq c \left(\frac{1}{\lambda^B}\right)^{q_1}$$

siendo $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} + M\beta$

tomando $A = 2\alpha q$, $B = q/q_1$

la condición del lema $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + M\beta + 2\alpha$

da $A + B =$ y por tanto tendremos

$$|\{x \mid h(x) > \lambda\}| \leq \left(\frac{1}{\lambda^A}\right)^{1/2\alpha} + c \left(\frac{1}{\lambda^B}\right)^{q_1} \leq c \left(\frac{1}{\lambda}\right)^q$$

4.22 Lema

En las condiciones del lema 4.21, si además
 $q >$ se tiene la desigualdad fuerte

$$\|h\|_q \leq c \|g\|_p$$

Demostración

Es una aplicación directa del teorema de interpolación de Marcinkiewicz. \blacksquare

De acuerdo con los lemas 4.19, 4.21, y 4.22 tendremos

$$4.23 \quad (a) \quad \iint_{y > 2x} \frac{f(x) g(y)}{x^\alpha y^\alpha (|x^M - y^M| + 1)^\beta} dx dy \leq \|f\|_q, \|g\|_q \leq$$

$$C \|f\|_q, \|g\|_p = C \|f\|_p \|g\|_p$$

ya que si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se cumple el lema 4.22 y será por tanto $\frac{1}{p} = \frac{1}{q}$

Acotaremos ahora la integral (b) en 4.16

$$(b) = \iint_{\frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 2} \frac{f(x) g(y)}{x^\alpha y^\alpha (|x^M - y^M| + 1)^\beta} dx dy = \int_1^\infty f(x) \ell(x) dx$$

donde $\ell(x)$ es tal que

$$x \approx 2^n \quad \ell(x) \approx \int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{g(y) dy}{x^\alpha y^\alpha (|x^M - y^M| + 1)^\beta}$$

luego si $x \approx 2^n$, al ser

$$\min(x^{M-1}, y^{M-1}) |x-y| \leq |x^M - y^M| \leq \max(x^{M-1}, y^{M-1}) |x-y|$$

será

$$\ell(x) \cong \frac{1}{2^{n\alpha} 2^{n(M-1)\beta}} \int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{g(y)}{(|x-y|+1)^\beta} dy$$

y por tanto

$$\ell(x) \leq \frac{1}{x^{2\alpha+(M-1)\beta}} \int_1^\infty \frac{g(y)}{(|x-y|+1)^\beta}$$

4.24 Lema

$$\underline{\text{Si}} \quad + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + M\beta + 2\alpha, \quad 0 < \beta < \quad, \quad M \geq 1, \quad q <$$

$$4.25 \quad \{x \mid \ell(x) > \lambda\} \leq c \left(\frac{\|g\|_p}{\lambda} \right)^q$$

Demostración

Por la homogeneidad de la desigualdad nos reducimos al caso $\|g\|_p = 1$ y escribimos

$$\ell(x) \leq \frac{1}{x^{2\alpha+(M-1)\beta}} h_2(x)$$

donde

$$h_2(x) = \int_1^\infty \frac{g(y)}{(|x-y|+1)^\beta}$$

que por el teorema de integración fraccionaria 1.56 $h_2(x)$ es de tipo débil - (p, q_1)

$$x \mid h_2(x) > \lambda \mid \leq c \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{q_1}$$

siempre que $q_1 < \quad + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} + \beta$

Tomando

$$A = (2\alpha + (M-1)\beta)q \quad B = q/q_1$$

la hipótesis del lema dice que $A + B = \quad$ y por tanto

$$\begin{aligned} \{x \mid \ell(x) > \lambda\} &\leq \left\{x \mid \frac{1}{x^{2\alpha + (M-1)\beta}} : \lambda^A\right\} + \left\{x \mid h_2(x) > \lambda^B\right\} \leq \\ &: \left(\frac{1}{\lambda^A}\right)^{\frac{1}{2\alpha + (M-1)\beta}} + c \left(\frac{1}{\lambda^B}\right)^{q_1} = c \left(\frac{1}{\lambda}\right)^q. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Por el teorema de interpolación de Marcinkiewicz,

i además suponemos $q > \quad$, obtendremos

$$\|\ell\|_q \leq c \|g\|_p$$

y entonces

$$\begin{aligned} 4.26 \quad (b) &= \int_1^\infty f(x) \cdot \ell(x) \, dx \leq \|f\|_q \cdot \|\ell\|_q \leq c \|f\|_q \cdot \|g\|_p = \\ &= \|f\|_p \|g\|_p \end{aligned}$$

ya que $q' = p$

Finalmente, juntando 4.23 y 4.26 queda

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{f(x) g(y)}{x^\alpha y^\alpha (|x^M - y^M| + 1)^\beta} dx dy \leq (a) \quad (b) \quad (c) \quad c \|f\|_p \|g\|_p$$

o que prueba la proposición 4.1. \square

Probaremos ahora que el teorema 4.3 es el mejor posible. Recordemos que en el caso $k=2$ la curva es la circunferencia y era necesario $p' > 4$, y que en [22] se demostraba la condición necesaria $q \leq \frac{p'}{k+1}$.

4.27 Lema

El teorema 4.3 es falso si $p' = k+1$, $q =$

Demostración

Si fuera

$$\|\hat{f}\|_{L^1(\gamma)} \leq c \|f\|_{\frac{k+1}{k}}$$

para toda función $f \in L^{\frac{k+1}{k}}(\mathbb{R}^2)$ también tendríamos su acotación dual

$$\|\widehat{g \, d\sigma}\|_{L^{k+1}(\mathbb{R}^2)} \leq c \|g\|_{L^\infty(\gamma)}$$

para toda función $g \in L^\infty(\gamma)$, siendo $d\sigma$ la medida de Lebesgue singular sobre

En particular, tomando $g \equiv$ tendríamos

$$\|\hat{d}\sigma\|_{L^{k+1}(\mathbb{R}^2)} \leq$$

y esto último es falso.

En efecto, si parametrizamos el trozo de curva compacta con

$$: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal} \quad \gamma(u) = (u, u^k)$$

será, por definición

$$\begin{aligned} \hat{d}\sigma(s, t) &= \int_0^1 e^{-2\pi i \gamma(u) \cdot (s, t)} \|\gamma'(u)\| du \\ &= \int_0^1 e^{-2\pi i (us + u^k t)} \sqrt{1 + k^2 u^{2k-2}} du \\ &= \int_0^1 \cos(2\pi(us + u^k t)) \sqrt{1 + k^2 u^{2k-2}} du - i \int_0^1 \sin(2\pi(us + u^k t)) \sqrt{1 + k^2 u^{2k-2}} du \end{aligned}$$

Al ser $|\hat{d}\sigma(s, t)|$ mayor o igual que el valor absoluto de su parte imaginaria y al estar $\sqrt{1 + k^2 u^{2k-2}}$ acotada por arriba y por abajo, para probar

$$4.28 \quad \|\hat{d}\sigma\|_{L^{k+1}(\mathbb{R}^2)}$$

bastará con que

$$\|I(s, t)\|_{L^{k+1}(\mathbb{R}^2)}$$

siendo

$$I(s, t) = \int_0^1 \operatorname{sen}(2\pi(us + u^k t)) \, du$$

Supongamos que $s \geq 0$, $t \geq 0$ haciendo en esta última integral el cambio de variable

$$: us + u^k t = u(s + u^{k-1} t)$$

$$\text{será } dv : \quad + ktu^{k-1}) \, du, \quad du \quad \frac{dv}{s + ktu^{k-1}}$$

luego

$$4.27 \quad I(s, t) = \int_0^{s+t} \frac{\operatorname{sen}(2\pi v)}{s + ktu^{k-1}} \, dv$$

Dividimos la integral en dos trozos

$$(a) \quad s \leq ktu^{k-1} \quad \text{es} \quad ktu^k \leq v \leq 2ktu^k$$

y escribiremos $\approx ktu^k$, ya que poniendo $= ktu^k$ en vez de su valor exacto no afectará a los cálculos que siguen.

Analogamente

$$du \approx \frac{dv}{ktu^{k-1}} \approx \frac{dv}{t^{1/k} v^{\frac{k-1}{k}}}$$

$$(b) \quad \geq ktu^{k-1} : us, \quad du \approx \frac{dv}{s}$$

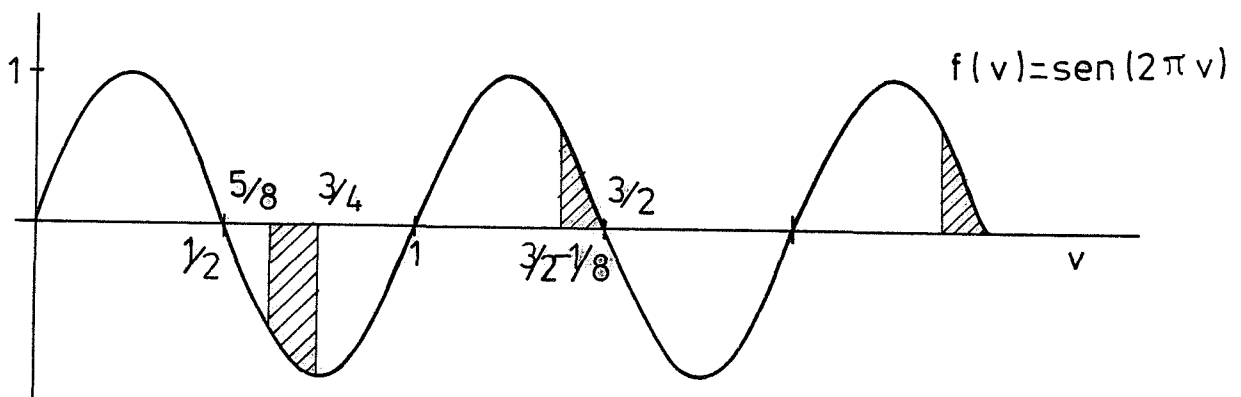
$$\text{Ahora, cuando } = ktu^{k-1} : \left(\frac{s}{kt}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

luego

$$us + u^k t = (k+1)t u^k = \frac{k+1}{k} \left(\frac{s}{t} \right)^{\frac{1}{k-1}} = C \left(\frac{s}{t} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

la integral 4.27 queda

$$I(s,t) = \frac{1}{t^{1/k}} \int_0^{C \left(\frac{s}{t} \right)^{\frac{1}{k-1}}} \frac{\text{sen}(2\pi v)}{v^{\frac{k-1}{k}}} dv + \frac{1}{s} \int_{C \left(\frac{s}{t} \right)^{\frac{1}{k-1}}}^{s+t} \frac{1}{v^{\frac{k-1}{k}}} \text{sen}(2\pi v) dv$$



pero

$$\int_0^{C_1} \frac{\text{sen}(2\pi v)}{v^{\frac{k-1}{k}}} dv \geq 0 \quad 0 \leq C_1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

luego siempre que (s,t) cumplan

$$4.29 \quad \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \leq C \left(\frac{s}{t} \right)^{\frac{1}{k-1}} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

será

$$I(s,t) \geq \frac{1}{s} \int_{3/4}^{s+t} \text{sen}(2\pi v) dv$$

pero

$$\int_{3/4}^{s+t} \sin(2\pi v) \, dv \geq \frac{1}{16}$$

para los pares (s, t) tales

$$4.30 \quad \frac{2n+1}{4} - \frac{1}{16} \leq s + t \leq \frac{2n+1}{4} \quad n \geq \dots \text{ natural}$$

Al ser la condición 4.29

$$4.31 \quad C_1 t^{1/k} \leq s \leq C_2 t^{1/k}$$

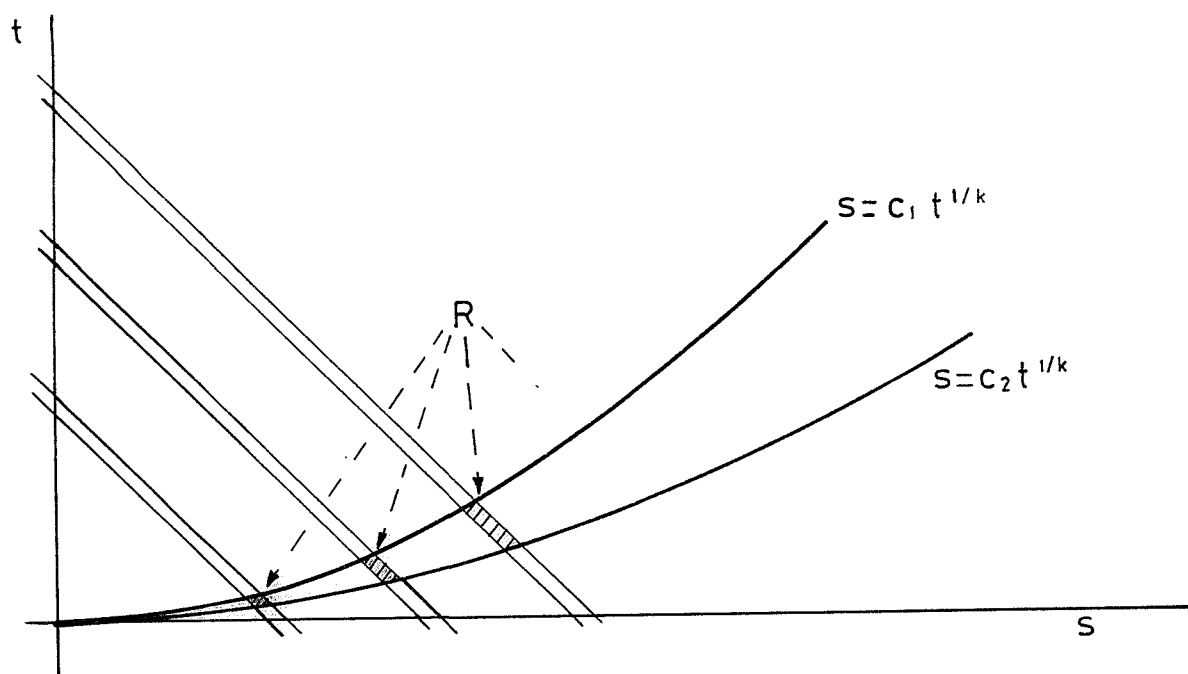
con $C_1 < C_2$, es la región del plano formada por los pares (s, t) , $s \geq 0$, $t \geq 0$ que cumplen las condiciones 4.29, 4.30, tendremos

$$\begin{aligned} \|\hat{d}\sigma\|_{p'}^{p'} &\geq \int_R |I(s, t)|^{p'} \, ds \, dt \geq \\ &\geq C_3 \int_{I_R} \int_{C_1 t^{1/k}}^{C_2 t^{1/k}} \left(\frac{1}{t^{1/k}}\right)^{p'} \, ds \, dt \geq C_4 \int_{I_R} \frac{t^{1/k}}{t^{p'/k}} \, dt \end{aligned}$$

siendo $I_R = \{t \mid (s, t) \in R\}$

La integral diverge si $\frac{1-p'}{k} + 1 \geq 0$ luego si $p' \leq k+1$

$$\|\hat{d}\sigma\|_{p'}$$



EL CONO DE SECCION $\gamma(t) = t^k$. -

4.32 Proposición

Si en el cono de sección (t, t^k) se verifica la
acotación 4.2, tomando $d\sigma(\xi)$ como la medida de Lebesgue
en el tronco de cono Γ_0 , entonces necesariamente

$$4.33 \quad q \leq \frac{p'}{k+1}$$

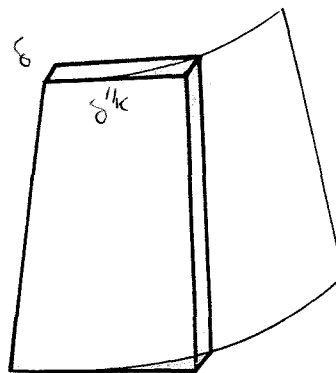
Demostración

En efecto, tomemos en Γ_0 el rectángulo R_δ adaptado a la superficie de dimensiones

$$\delta^{1/k} \times \delta^{1/k} \times$$

y sea una función de soporte compacto adaptada a R_δ , entonces

$$\|\hat{\psi}\|_{L^q(\Gamma)} \geq c \delta^{1/k}$$



mientras que por el principio de incertidumbre

$$\|\psi\|_p \leq \delta^{(1 + \frac{1}{k})(\frac{p-1}{p})}$$

luego si se cumple 4.2 para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$ sería

$$c \delta^{\frac{1}{qk}} \leq \delta^{(1 + \frac{1}{k})(\frac{p-1}{p})}$$

para todo $\delta > 0$, haciendo tender δ hacia cero nos aparece la condición necesaria

$$(\frac{1}{k} + \frac{p-1}{p}) - \frac{1}{kq} \leq 0$$

que es precisamente 4.33. ■

4.34 Proposición

Si fijados p, q se cumple 4.2 en siendo $d\sigma(\xi)$ como la medida de Lebesgue en Γ_0 , entonces necesariamente

$$4.35 \quad d\sigma(\xi) \cong r^\alpha dr d\theta = \frac{3q}{p'} -$$

Demostración

En efecto, supongamos que en Γ_0 tomamos la medida de Lebesgue $d\mu$ y que se cumple

$$4.36 \quad \left(\int_{\Gamma_0} |\hat{f}(\xi)|^q d\mu(\xi) \right)^{1/q} \leq c_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$

Si Γ_n es el tronco de cono formado por los puntos de Γ_0 que estén a una altura $2^n \leq z \leq 2^{n+1}$, por el teorema del cambio de variable, dada $f \in S(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Gamma_n} |\hat{f}(\xi)|^q d\mu(\xi) \right)^{1/q} &= \left(\int_{\Gamma_0} |\hat{f}(2^n \xi')|^q 2^{2n} d\mu(\xi') \right)^{1/q} = \\ &= \frac{2^{2n/q}}{2^{3n}} \left(\int_{\Gamma_0} |\hat{g}(\xi')|^q d\mu(\xi') \right)^{1/q} \end{aligned}$$

donde $g(x) = f(\frac{x}{2^n})$

Observemos entonces que $\|g\|_p = 2^{3n/p} \|f\|_p$
 por tanto por 4.36 obtenemos

$$\left(\int_{\Gamma_n} |\hat{f}(\xi)|^q d\mu(\xi) \right)^{1/q} \leq c \frac{2^{2n/q}}{2^{3n}} \|g\|_p = c \frac{2^{2n/q}}{2^{3n}} 2^{3n/p} \|f\|_p$$

Luego en Γ_n deberá ser $d\sigma(\xi) \approx 2^n \left(\frac{3q}{p'} - 2\right) d\mu(\xi)$
 y por consiguiente es necesario que

$$d\sigma(\xi) \approx r^{\frac{3q}{p'} - 2} r dr d\theta \approx r^{\frac{3q}{p'} - 1} dr d\theta$$

4.37 Teorema

Se cumple la desigualdad "a priori"

$$4.38 \left(\int_{\Gamma} |\hat{f}(\xi)|^q r^{\frac{2-k}{k+1}} dr d\theta \right)^{1/q} \leq c_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

para toda función $f \in S(\mathbb{R}^3)$ con $p' \geq 2k$ ($p' > 4$ $k=2$),
 $q = \frac{p'}{k+1}$

Demostración

Vamos a proceder con una división del cono de mane_
 ra análoga a como la hacíamos en el caso del cono de sección
 circular del teorema 2.5

Supongamos que tiene un vértice en el origen
 y dividámoslo en bloques diádicos Γ_n , $n \in \mathbb{Z}$ siendo "

el tronco de cono que está a una altura tal que $2^n \leq z \leq 2^{n+1}$. Tomemos ahora la curva formada por la intersección de Γ con un plano perpendicular al eje que esté a la altura z y dividamos Γ_z en $\delta^{-1/2}$ segmentos de curva

$$\delta^{-1/2}$$

tal como hacíamos en el teorema 4.3. Recordemos que el segmento $I_{\nu} \frac{2-k}{k}$ está en la dirección angular ν y tiene una longitud $\nu^k \delta^{1/k}$.

Si $a_{\nu} = \nu^{2/k} \delta^{1/k}$ es el origen del segmento I_{ν} unamos cada a_{ν} con el vértice del cono a lo largo de una generatriz, quedando de este modo el cono Γ trinchado en $\delta^{-1/2}$ tiras triangulares T_{ν} .

Cortamos ahora cada Γ_n en $\delta^{-1/2}$ secciones perpendiculares al eje equidistantes $2^n \delta^{1/2}$ y ensanchamos Γ con homogeneidad de manera que a una altura z se tenga un espesor δr , obteniendo así el cono grueso $\tilde{\Gamma}$ troceado tal como queremos.

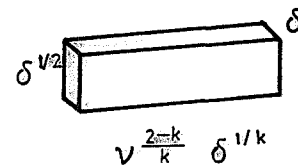
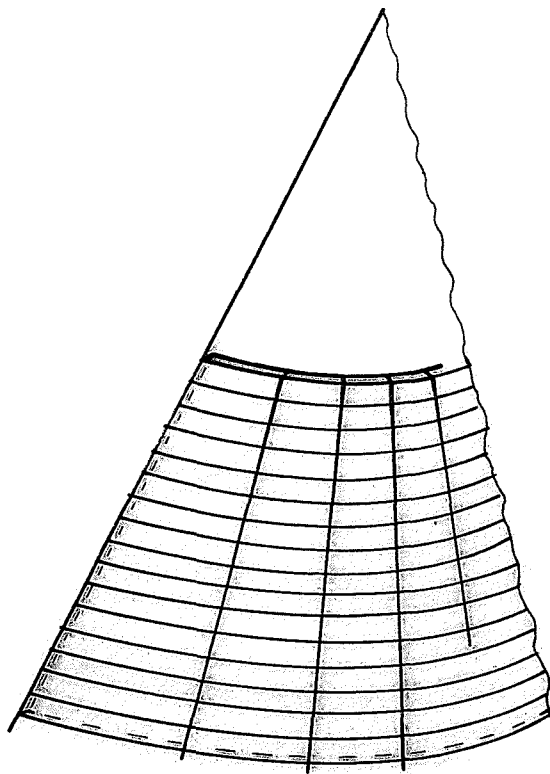
Tendremos pues

$$\tilde{\Gamma} = \bigcup_{n,j,\nu} Q_{nj\nu}$$

donde Q_{njv} es la losa de dimensiones

$$2^n v^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1/k} \times 2^n \delta^{1/2} \times 2^n \delta$$

que se encuentra a una altura $z \cong 2^n + 2^n \delta^{1/2} j$ y en una dirección angular $\theta \cong v^{2/k} \delta^{1/k}$.



Para probar 4.38 es suficiente con tomar constante en cada Q_{njv} y demostrar que

$$4.39 \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} \int_{\Gamma^*} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\delta^{-1/2}} \sum_{v=1}^{\delta^{-1/2}} \frac{a_{njv}}{2^{n \frac{3k}{k+1}} \frac{1}{q}} \hat{\phi}_{njv}(\xi) \right|^q d\xi \right)^{1/q} \leq$$

$$C \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\delta^{-1/2}} \sum_{v=1}^{\delta^{-1/2}} |a_{njv}|^p \delta^2 2^{3n} \right)^{1/p}$$

donde a_{njv} es el valor que toma en Q_{njv} , ϕ_{njv} es la función característica de Q_{njv} .

Para probar 4.39 bastará que para cada suficientemente pequeño sea

$$4.40 \quad \left\| \sum_{njv} \frac{a_{njv}}{2^{n \frac{3k}{k+1} 1/q}} \hat{\phi}_{njv} \right\|_{p'} \leq c \delta^{1/q} \left\| \sum_{njv} a_{njv} \phi_{njv} \right\|_q,$$

donde p', q' son los exponentes duales de p, q respectivamente.

De esta forma, poniendo $\frac{3k}{k+1} \frac{1}{q} = \frac{3k}{p'}$, al ser aplicando la desigualdad de Hausdorff-Young

$$\begin{aligned} & \left(\int \left| \sum_{njv} \frac{a_{njv}}{2^{n \frac{3k}{p'}}} \hat{\phi}_{njv}(\xi) \right|^{p'} d\xi \right)^{1/p'} \\ & \left(\int \left| \sum_{nm} \sum_{j\ell} \sum_{v\mu} \frac{a_{njv}}{2^{n \frac{3k}{p'}}} \frac{a_{m\ell\mu}}{2^{m \frac{3k}{p'}}} \phi_{njv} * \phi_{m\ell\mu}(x) \right|^s dx \right)^{\frac{1}{2s}} \\ & c \left[\sum_{r \geq 0} \left(\int \left| \sum_n \sum_{j\ell} \sum_{v\mu} \frac{a_{njv}}{2^{n \frac{3k}{p'}}} \frac{a_{n-r, \ell, \mu}}{2^{(n-r) \frac{3k}{p'}}} \phi_{njv} * \phi_{n-r, \ell, \mu}(x) \right|^s dx \right)^{1/s} \right]^{1/2} \\ & c \left(\sum_{(a)} \dots \sum_{(b)} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

donde $\sum_{(a)}$ consistirá en tomar la suma en con
 $r \geq \lfloor \log_2 \delta \rfloor$ $\sum_{(b)}$ en tomar la suma con $0 \leq r \leq \lfloor \log_2 \delta \rfloor$.

4.41 Primer caso

Vamos a estimar $\sum_{(a)}$ que corresponde a todos los

pares (m, n) con $m \leq n$ $n-m \geq |\log_2 \delta|$, s decir
con $2^m \leq \delta 2^n$.

Fijado pues $= n-m$ se tiene, salvo solapamien-
tos finitos que no dependen de

$$(\phi_{njv} * \phi_{m\ell\mu}) \cdot (\phi_{nj'v'} * \phi_{m\ell'\mu'}) = 0$$

$$j \neq j' \quad v \neq v'$$

mientras que

$$\text{sop}(\phi_{njv} * \phi_{m\ell\mu}) \quad \text{sop}(\phi_{njv} * \phi_{m\ell'\mu'})$$

para todo ℓ', μ' y hay $\delta^{-1/2} \cdot \delta^{-1/2} = \delta^{-1}$ de estos índices.

Por consiguiente

$$\left(\int \left| \sum_n \sum_{j\ell} \sum_{v\mu} \frac{a_{njv}}{2^{\frac{n-3k}{2}} 2^{\frac{3k}{2}}} \frac{a_{m\ell\mu}}{2^{\frac{m-3k}{2}} 2^{\frac{3k}{2}}} \phi_{njv} * \phi_{m\ell\mu}(x) \right|^s dx \right)^{1/s} \leq$$

$$C \left(\sum_{njv} \frac{|a_{njv}|^s}{2^{\frac{n-3ks}{2}} 2^{\frac{3ks}{2}}} \int \left| \phi_{njv} * \sum_{\ell\mu} a_{m\ell\mu} \phi_{m\ell\mu}(x) \right|^s dx \right)^{1/s}$$

$$4.42 \leq C \left(\sum_n \sum_{jv} \sum_{\ell\mu} \frac{\delta^{-1(s-1)} |a_{njv}|^s |a_{m\ell\mu}|^s}{2^{\frac{n-3ks}{2}} 2^{\frac{m-3ks}{2}}} \int \left| \phi_{njv} * \phi_{m\ell\mu}(x) \right|^s dx \right)^{1/s}$$

pero ahora

$$\int |\phi_{njv} * \phi_{m\ell\mu}(x)|^s dx \leq c \delta^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k})(s+1)} \mu^{\frac{2-k}{k}s} \nu^{\frac{2-k}{k}s} 2^{3ms} 2^{3n}$$

ya que

$$\|\phi_{njv} * \phi_{m\ell\mu}\|_{\infty} \cong |\text{sop}(\phi_{m\ell\mu})| = \delta^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k})} 2^{3m} \mu^{\frac{2-k}{k}}$$

$$|\text{sop}(\phi_{njv} * \phi_{m\ell\mu})| \cong |\text{sop}(\phi_{njv})| = \delta^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k})} 2^{3n} \nu^{\frac{2-k}{k}}$$

por tanto la expresión 4.42 es

$$4.43 \leq c \left(\sum_n \sum_{j\ell} \sum_{\nu\mu} \frac{\delta^{1-s} \delta^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k})(s+1)} 2^{3ms} 2^{3n}}{2^{\frac{3ks}{p'}} 2^{\frac{3ks}{p'}}} \frac{|a_{njv}|^s |a_{m\ell\mu}|^s}{\mu^{\frac{k-2}{k}s} \nu^{\frac{k-2}{k}s}} \right)^{1/s} =$$

4.44 Lema

Se tiene la acotación

$$4.45 \sum_{\nu\mu} \frac{|a_{njv}|^s |a_{m\ell\mu}|^s}{\mu^{\frac{k-2}{k}s} \nu^{\frac{k-2}{k}s}} \leq c \delta^{\frac{s-1}{2}} \left(\sum_{\nu} |a_{njv}|^{q'} \nu^{\frac{k-2}{k}} \right)^{1/p_1} \left(\sum_{\mu} |a_{m\ell\mu}|^{q'} \mu^{\frac{k-2}{k}} \right)^{1/p_1}$$

$$\text{siendo } p_1 s = q \quad q = \frac{p'}{k+1}$$

Demostración

En efecto

$$\sum_{\nu \mu} \frac{|a_{nj\nu}|^s}{\mu^{\frac{k-2}{k}s}} \frac{|a_{m\ell\mu}|^s}{\nu^{\frac{k-2}{k}}} = \sum_{\nu \mu} A_\nu A_\mu \frac{1}{\nu^\alpha \mu^\beta} = \sum_{\nu} A_\nu B_\nu$$

donde

$$A_\nu = \frac{|a_{nj\nu}|^s}{\nu^{\frac{k-2}{k}} \frac{1}{p_1}}$$

$$= \frac{k-2}{k} - \frac{k-2}{k} \frac{1}{p_1} = \frac{(k-2)(k-1)(s-1)}{2k}$$

$$\beta = \frac{k-2}{k}s - \frac{k-2}{k} \frac{1}{p_1} = \frac{(k-2)(k+1)(s-1)}{2k}$$

$$B_\nu = \sum_{\mu} \frac{A_\mu}{\nu^\alpha \mu^\beta}$$

y como $< p_1 <$ por la desigualdad de Hölder

$$4.46 \quad \sum_{\nu} A_\nu B_\nu \leq \left(\sum_{\nu} A_\nu^{p_1} \right)^{1/p_1} \left(\sum_{\nu} B_\nu^{p'_1} \right)^{1/p'_1}$$

$$\text{con } \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} =$$

pero ahora

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\nu} B_\nu^{p'_1} \right)^{1/p'_1} &= \left(\sum_{\nu} \left(\sum_{\mu} \frac{A_\mu}{\nu^\alpha \mu^\beta} \right)^{p'_1} \right)^{1/p'_1} \leq \sum_{\mu} \left[\sum_{\nu} \left(\frac{A_\mu}{\nu^\alpha \mu^\beta} \right)^{p'_1} \right]^{1/p'_1} \\ &= \sum_{\mu} \frac{A_\mu}{\mu^\beta} \left(\sum_{\nu} \frac{1}{\nu^{\alpha p'_1}} \right)^{1/p'_1} \end{aligned}$$

con

$$\left(\sum_{v=1}^{\delta} \frac{1}{v^{\alpha p_1'}} \right)^{1/p_1'} = \left(\sum_{v=1}^{\delta} \frac{1}{v^{\frac{2-k}{k}}} \right)^{1/p_1'} \cong \delta^{-1/2 \left(\frac{2-k}{k} + 1 \right)}^{1/p_1'}$$

$$\delta^{-\frac{(k-1)(s-1)}{2k}}$$

$$\sum_{\mu} \frac{A_{\mu}}{\mu^{\beta}} \leq \left(\sum_{\mu} A_{\mu}^{p_1} \right)^{1/p_1} \left(\sum_{\mu=1}^{\delta} \mu^{-\beta p_1'} \right)^{1/p_1'} \leq \delta^{-\frac{s-1}{2k}} \left(\sum_{\mu} A_{\mu}^{p_1} \right)^{1/p_1}$$

puesto que

$$\left(\sum_{\mu=1}^{\delta} \mu^{-\beta p_1'} \right)^{1/p_1'} \cong \delta^{-1/2 (-\beta p_1' + 1)}^{1/p_1'} = \delta^{-\frac{s-1}{2k}}$$

con lo cual nos queda

$$\left(\sum_v B_v^{p_1'} \right)^{1/p_1'} \leq \delta^{-\frac{(k-1)(s-1)}{2k}} \delta^{-\frac{s-1}{2k}} \left(\sum_{\mu} A_{\mu}^{p_1} \right)^{1/p_1}$$

$$\delta^{-\frac{s-1}{2}} \left(\sum_{\mu} A_{\mu}^{p_1} \right)^{1/p_1}$$

que sustituido en 4.46 nos da 4.45. ■

Teniendo en cuenta ahora que

$$4.47 \quad \sum_{j=1}^{\delta^{-1/2}} \left(\sum_v |a_{njv}|^{q' \frac{2-k}{k}} \right)^{1/p_1} \leq \delta^{-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p_1} \right)} \left(\sum_{j,v} |a_{njv}|^{q' \frac{2-k}{k}} \right)^{1/p_1}$$

por la desigualdad de Hölder al ser p_1 sustituyendo
4.45 en 4.43 y agrupando términos nos queda finalmente

$$I \leq C 2^{-r} \frac{3s-3}{2s} \delta^k \frac{s-1}{s} \left(\sum_n \left(\sum_{j,v} |a_{njv}|^{q'} v^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k}} 2^{3n} \right)^{1/p_1} \right. \\ \cdot \left. \left(\sum_{\ell,\mu} |a_{n-r,\ell,\mu}|^{q'} \mu^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k}} 2^{3(n-r)} \right)^{1/p_1} \right)^{1/s} \leq \\ C 2^{-r} \frac{3s-3}{2s} \delta^k \frac{s-1}{s} \left(\sum_{njv} |a_{njv}|^{q'} v^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k}} 2^{3n} \right)^{\frac{2}{p_1 s}}$$

donde hemos utilizado

$$\sum_n A_n^{2/p_1} \leq \left(\sum_n A_n \right)^{2/p_1}$$

con $A_n = \left(\sum_{j,v} |a_{njv}|^{q'} v^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k}} 2^{3n} \right)$

que es correcto siempre que $\frac{2}{p_1} \geq 1$ que equivale a
 $q' \geq 2k$.

Luego finalmente

$$\sum_{(a)} = \sum_{r \geq |\log_2 \delta|} \left[\int \left| \sum_n \sum_{j,\ell} \sum_{v,\mu} \frac{a_{njv} a_{n-r,\ell,\mu}}{2^{\frac{3k}{p'}} \frac{(n-r)^{\frac{3k}{p'}}}} \phi_{njv}^* \phi_{n-r,\ell,\mu}(x) \right|^s dx \right]^{\frac{1}{s}} \\ \leq C \sum_{r \geq |\log_2 \delta|} 2^{-r} \frac{3s-3}{2s} \delta^k \frac{s-1}{s} \left(\sum_{njv} |a_{njv}|^{q'} v^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k}} 2^{3n} \right)^{2/q'}$$

$$C \delta^{\frac{(3+2k)(s-1)}{2s}} \left(\sum_{njv} |a_{njv}|^q v^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k}} 2^{3n} \right)^{2/q},$$

4.48 Segundo Caso

Vamos a acotar ahora

$$(b) \quad \sum_{0 \leq r \leq |\log_2 \delta|} \left| \int \left| \sum_n \sum_{j\ell} \sum_{v\mu} \frac{a_{njv} a_{n-r,\ell,\mu}}{2^{\frac{3k}{p'}} 2^{(n-r)\frac{3k}{p'}}} \phi_{njv} * \phi_{n-r,\ell,\mu}^{(x)} \right|^s dx \right|^{1/s}$$

Que $\dots = n-m \geq |\log_2 \delta|$ significa que $2^m \geq \delta 2^n$, es decir, que el diámetro de Γ_m^* es más grande que el lado pequeño de cualquier losa que esté en Γ_n^* .

Fijado un $\dots = n-m$ de este caso el solapamiento vertical es del orden de $\delta^{-1/2}$, tal como lo hacíamos en el tercer caso del teorema 2.5. es decir, que fijadas las direcciones angulares v, μ un punto pertenecerá como mucho a $\delta^{-1/2}$ conjuntos del tipo

$$\text{sup}(\phi_{njv} * \phi_{m\ell\mu}) \quad , \quad \delta^{-1/2}$$

De este modo

$$\left| \int \left| \sum_n \sum_{j\ell} \sum_{v\mu} \frac{a_{njv} a_{m\ell\mu}}{2^{\frac{3k}{p'}} 2^{\frac{3k}{p'}}} \phi_{njv} * \phi_{m\ell\mu}^{(x)} \right|^s dx \right|^{1/s} \leq$$

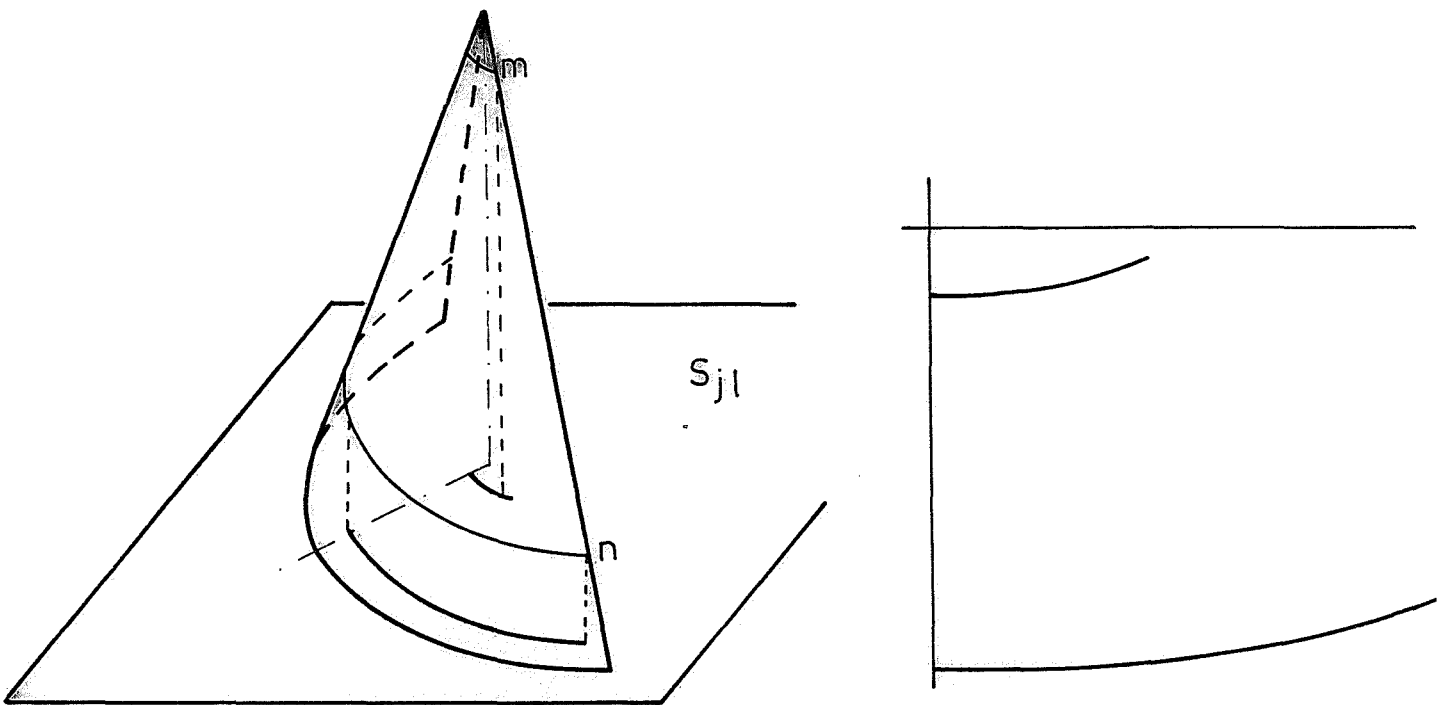
$$4.49 \quad C \left(\sum_n \sum_{j\ell} \frac{\delta^{-\frac{1}{2}(s-1)}}{n^{\frac{3k}{p'}s} \ell^{\frac{3k}{p'}s}} \int \left| \sum_v a_{njv} \phi_{njv}^* \sum_\mu a_{m\ell\mu} \phi_{m\ell\mu}(x) \right|^s dx \right)^{1/s}$$

Ahora, fijados n, m , estudiaremos el solapamiento horizontal y para ello basta con observar el tamaño y la distribución de los diferentes soportes

$$\text{sop}(\phi_{njv} * \phi_{m\ell\mu})$$

en el plano $s_{j\ell}$ perpendicular al eje v que está a una altura

$$2^n + 2^m + j\delta^{1/2} 2^n + \ell\delta^{1/2} 2^m$$



Se tendrá

$$\int \left| \sum_{\nu} a_{nj\nu} \phi_{nj\nu} * \sum_{\mu} a_{m\ell\mu} \phi_{m\ell\mu}(x) \right|^s dx \leq$$

$$\leq \sum_{\nu\mu} M(\nu, \mu)^{s-1} |a_{nj\nu}|^s |a_{m\ell\mu}|^s \int |\phi_{nj\nu} * \phi_{m\ell\mu}(x)|^s dx$$

donde $M = M(\nu, \mu)$ es la función de solapamiento.

La situación geométrica es algo complicada ya que el lado grande de $Q_{nj\nu}$ puede ser más pequeño que el lado grande de $Q_{m\ell\mu}$. Vamos a distinguir y tratar por separado cada uno de los cuatro posibles casos siguientes, según sean

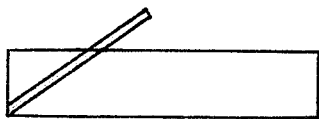
(a)



$$\mu^{\frac{2-k}{k}} 2^m \leq \nu^{\frac{2-k}{k}} 2^n$$

$$\text{con } \mu^{\frac{2-k}{k}} \left(\nu^{\frac{2k-2}{k}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}} \right) \leq 2^{n-m}$$

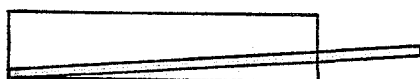
(b)



$$\mu^{\frac{2-k}{k}} 2^m \leq \nu^{\frac{2-k}{k}} 2^n$$

$$\mu^{\frac{2-k}{k}} \left(\nu^{\frac{2k-2}{k}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}} \right) \geq 2^{n-m}$$

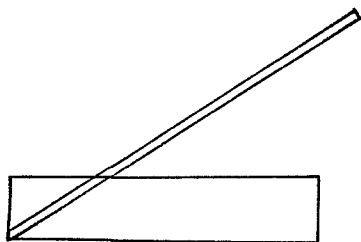
(c)



$$\mu^{\frac{2-k}{k}} 2^m \geq \nu^{\frac{2-k}{k}} 2^n$$

$$\mu^{\frac{2-k}{k}} \left(\nu^{\frac{2k-2}{k}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}} \right) \leq 2^{n-m}$$

(d)



$$\mu^{\frac{2-k}{k}} 2^m \geq \nu^{\frac{2-k}{k}} 2^n$$

$$\mu^{\frac{2-k}{k}} \left(\nu^{\frac{2k-2}{k}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}} \right) \geq 2^{n-m}$$

4.50 Lema

Para cada uno de los casos anteriores se tienen las acotaciones

4.51 En los casos (a) y (c)

$$M \leq \frac{2^{n-m} \mu^{\frac{k-2}{k}}}{\left| \nu^{\frac{2k-2}{k}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}} \right| + 1} \quad \text{si } \nu \leq \mu \text{ ó } \mu \leq \nu \text{ con } M \leq \mu$$

$$M \leq \frac{2^{(n-m) \left(\frac{1}{2} + \frac{k-1}{k} \right)}}{\left| \nu^{\frac{2k-2}{k}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}} \right| + 1} \quad \mu \leq \nu \text{ con } M \geq \mu$$

4.52 En los casos (b) y (d)

$$M \leq 4$$

Demostración

Vamos a estudiar toda la situación geométrica sobre el plano $s_{j\ell}$. En los casos (b) y (d) se ve claramente que el solapamiento es finito y por tanto Π está

acotada por una constante independiente de la descomposición. El caso (c) es análogo al caso (a).

Estudiaremos el caso (a)

Fijados v, μ proyectamos

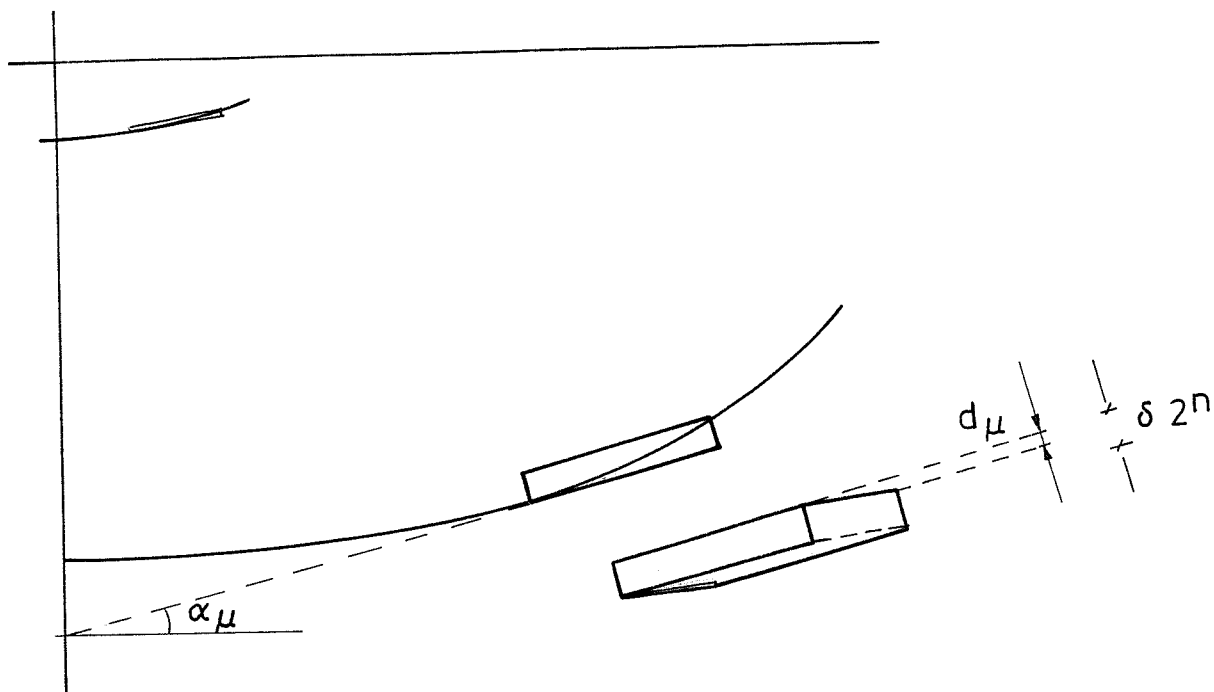
$$\text{sop}(\phi_{njv} * \phi_{m\ell\mu})$$

sobre una recta perpendicular a la dirección del lado más grande de ϕ_{njv} , si ahora tomamos $\text{sop}(\phi_{m,\ell,\mu+1})$, la proyección de $\text{sop}(\phi_{njv} * \phi_{m,\ell,\mu+1})$ sobre r estará desplazada una distancia d_μ respecto de la proyección de $\text{sop}(\phi_{njv} * \phi_{m\ell\mu})$, siendo d_μ la proyección del lado grande de $\text{sop}(\phi_{m,\ell,\mu})$ sobre la recta es decir

$$d_\mu = \delta^{1/k} 2^m \mu^{\frac{2-k}{k}} \sin |\alpha_\mu - \alpha_v| \approx \delta 2^m \mu^{\frac{2-k}{k}} \left| \mu^{\frac{2k-2}{k}} - v^{\frac{2k-2}{k}} \right|$$

pues α_μ es el ángulo que forma $\text{sop}(\phi_{m\ell\mu})$ con el eje $= 0$, siendo por tanto

$$\sin \alpha_\mu \approx C(\mu^{2/k} \delta^{1/k})^{k-1}$$



Las respectivas proyecciones irán alejándose o acercándose al origen según sea $\mu \leq \nu$ ó $\nu \leq \mu$

Si por ejemplo $\mu \geq \nu$ y vamos tomando $\mu+1, \dots, \mu+M_1$
(con $M_1 \leq \delta^{-1/2}$) será

$$\text{sop}(\phi_{nj\nu} * \phi_{m\ell\mu}) \cap \text{sop}(\phi_{nj\nu} * \phi_{m,\ell,\mu+M_1}) = \phi$$

siempre que

$$4.53 \quad d_\mu + d_{\mu+1} + d_{\mu+M_1} \geq \delta 2^n$$

pues $\delta 2^n$ es el espesor de $\text{sop}(\phi_{nj\nu})$

Naturalmente, para hallar la función de solapamiento
habrá que hallar también el primer M_2 que haga

$$4.54 \quad d_{\mu} + d_{\mu-1} - d_{\mu-M_2} \geq \delta 2^n$$

y entonces será $M(\nu, \mu) = \max \{M_1, M_2\}$

Hay que ir con cuidado, pues podría ser por ejemplo que en 4.53 ningún M_1 cumpla la condición porque - lleguemos al final $\delta^{-1/2}$ y todavía

$$d_{\mu} + d_{\mu+1} + d_{\delta^{-1/2}} \leq \delta 2^n$$

o que en 4.54 sea

$$d_{\mu} + d_{\mu-1} + d_{\nu} \leq \delta 2^n$$

y tendremos que considerar también estas posibilidades.

Análogas consideraciones pueden hacerse para el caso $\mu \leq \nu$

Sea $\mu \leq \nu$, entonces pueden suceder dos casos

$$1.1 \quad \text{que} \quad d_{\mu} + d_{\mu+1} + d_{\nu} \geq \delta 2^n$$

$$1.2 \quad \text{o bien que} \quad d_{\mu} + d_{\mu+1} + d_{\nu} \leq \delta 2^n$$

En este caso, si tomamos $f(\mu) = d_{\mu}$, es decreciente pues $f'(\mu) = \delta 2^m \left(\frac{2-k}{k} \nu^{\frac{2k-2}{k}} \mu^{\frac{2-2k}{k}} - 1 \right) \leq 0$ esto quiere decir que

$$d_{\mu} + d_{\mu+1} + d_{\mu+M} \leq d_{\mu} + d_{\mu-1} + d_{\mu-M}$$

y por tanto el caso más desfavorable será tomar el primer
tal que

$$d_{\mu} + d_{\mu+1} \cdots d_{\mu+M} \geq \delta 2^n$$

como

$$d_{\mu} + d_{\mu+1} \cdots d_{\mu+M} = \delta 2^m \sum_{j=0}^M (\mu+j)^{\frac{2-k}{k}} \left(v^{\frac{2k-2}{k}} - (\mu+j)^{\frac{2k-2}{k}} \right)$$

hay que hallar tal que

$$\sum_{j=0}^M (\mu+j)^{\frac{2-k}{k}} \left(v^{\frac{2k-2}{k}} - (\mu+j)^{\frac{2k-2}{k}} \right) \cong 2^{n-m}$$

$$1. \quad M \leq 2\mu \quad \text{con} \quad \mu \leq v/4$$

$$2^{n-m} \cong \sum_{j=0}^M (\mu+j)^{\frac{2-k}{k}} \left(v^{\frac{2k-2}{k}} - (\mu+j)^{\frac{2k-2}{2}} \right) \geq M \mu^{\frac{2-k}{k}} \left(v^{\frac{2k-2}{k}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}} \right)$$

pues

$$\mu \leq \mu+j \leq 3\mu \quad v^{\frac{2k-2}{k}} - (\mu+j)^{\frac{2k-2}{k}} \geq v^{\frac{2k-2}{k}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}}$$

para todo luego

$$M \leq \frac{2^{n-m} \mu^{\frac{k-2}{k}}}{\left| v^{\frac{2k-2}{2}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}} \right| + 1}$$

$$M \geq 2 \quad \text{con} \quad \leq v/4$$

$$\sum_{j=0}^M (\mu+j)^{\frac{2-k}{k}} \left(v^{\frac{2k-2}{k}} - (\mu+j)^{\frac{2k-2}{k}} \right) = v^{\frac{2k-2}{k}} \sum_{j=0}^M (\mu+j)^{\frac{2-k}{k}} - \sum_{j=0}^M (\mu+j)^{\frac{2-k}{k}}$$

$$\frac{k}{2} v^{\frac{2k-2}{k}} \left((\mu+M)^{2/k} - \mu^{2/k} \right) - \frac{1}{2} \left((\mu+M)^2 - \mu^2 \right) \cong v^{\frac{2k-2}{k}} M^{2/k} - M^2$$

$$\text{pero es } M \leq \frac{2^{n-m}}{v}$$

ya que

$$2^{n-m} \cong \sum_{j=0}^M (\mu+j)^{\frac{2-k}{k}} \left(v^{\frac{2k-2}{k}} - (\mu+j)^{\frac{2k-2}{k}} \right) \geq \sum_{j=0}^M (\mu+j)^{\frac{2-k}{k}} (v-\mu-j) (\mu+j)^{\frac{k-2}{k}} =$$

$$\sum_{j=0}^M (v-\mu-j) = M \left((v-\mu) - \frac{M}{2} \right)$$

$$\text{luego} \quad M \leq \frac{2^{n-m}}{v}$$

y por tanto

$$2^{n-m} \cong v^{\frac{2k-2}{k}} M^{2/k} - M^2 = M^2 \left(v^{\frac{2k-2}{k}} M^{\frac{2-2k}{k}} - 1 \right) \geq M^2 \left(\frac{2^{n-m}}{v} \right)^{\frac{2-2k}{k}} v^{\frac{2k-2}{k}}$$

de donde

$$M \leq \frac{2^{\frac{(n-m)(1+\frac{2k-2}{k})}{2}}}{v^{\frac{2k-2}{k}}} \cong \frac{2^{\frac{(n-m)(1+\frac{2k-2}{k})}{2}}}{\left| v^{\frac{2k-2}{k}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}} \right| + 1}$$

$$\geq \frac{\nu}{4}, \quad \text{en este caso}$$

$$2^{n-m} \cong \sum_{j=0}^M (\mu+j)^{\frac{2-k}{k}} \left(\nu^{\frac{2k-2}{k}} - (\mu+j)^{\frac{2k-2}{k}} \right) \geq \nu^{\frac{2-k}{k}} \sum_{j=0}^M (\nu-\mu-j)^{\frac{k-2}{k}} \cong$$

$$\cong M \left((\nu-\mu) - \frac{M}{2} \right)$$

luego

$$M \leq \frac{2^{n-m}}{|\nu-\mu|+1}$$

1.2) En este caso tomaremos $M = \max \{M_1, M_2, M_3\}$ siendo
 $M_1 = \nu-\mu$, M_2 el primer M_2 que haga

$$d_\mu + d_{\mu-1} \cdot d_{\mu-M_2} \geq \delta 2^n$$

M_3 el primer M_3 tal que

$$d_\nu + d_{\nu+1} + d_{\nu+M_3} \geq \delta 2^n$$

1.2.1 acotemos M_1 :

Como es $d_\nu + d_{\nu-1} \cdot d_\mu \leq \delta 2^n$

$$2^{n-m} \geq \sum_{j=0}^{\nu-\mu} (\nu-j)^{\frac{2-k}{k}} \left(\nu^{\frac{2k-2}{k}} - (\nu-j)^{\frac{2k-2}{k}} \right) \cong$$

$$\cong \frac{k}{2} (\nu^{2/k} - \mu^{2/k}) \nu^{\frac{2k-2}{k}} - \frac{1}{2} (\nu^2 - \mu^2)$$

2.1 $\frac{v}{4}$ queda

$$2^{n-m} \geq \frac{k-1}{2} v^2 \cong$$

y por tanto

$$M_1 \leq v \leq 2^{(n-m)\frac{1}{2}} \leq \frac{2^{(n-m)(1+\frac{2k-2}{k})\frac{1}{2}}}{v^{\frac{2k-2}{k}}} \cong \frac{2^{(n-m)(1-\frac{2k-2}{k})\frac{1}{2}}}{|v^{\frac{2k-2}{k}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}}| + 1}$$

1.2.1.2 es $\geq \frac{v}{4}$

$$\sum_{j=0}^{v-\mu} (v-j)^{\frac{2-k}{k}} \left(v^{\frac{2k-2}{k}} - (v-j)^{\frac{2k-2}{2}} \right) \cong \mu^{\frac{2-k}{k}} \mu^{\frac{k-2}{2}} \sum_{j=0}^{v-\mu} j \cong (v-\mu)^2$$

luego

$$M_1 \leq v-\mu \leq \frac{2^{n-m}}{v-\mu} \cong \frac{2^{n-m} \mu^{\frac{k-2}{k}}}{|v^{\frac{2k-2}{k}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}}| + 1}$$

1.2.2) acotemos M_2 , este caso es sencillo pues

$$2^{n-m} \cong \sum_{j=0}^{M_2} (\mu-j)^{\frac{2-k}{k}} \left(v^{\frac{2k-2}{k}} - (\mu-j)^{\frac{2k-2}{2}} \right) \geq$$

$$\geq \sum_{j=0}^{M_2} \mu^{\frac{2-k}{k}} \left(v^{\frac{2k-2}{k}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}} \right) = M_2 \mu^{\frac{2-k}{k}} \left(v^{\frac{2k-2}{k}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}} \right)$$

de donde resulta la relación.

2.3 Vamos a hallar M_3 tal que

$$2^{n-m} \cong \sum_{j=0}^{M_3} (v+j)^{\frac{2-k}{k}} \left[(v+j)^{\frac{2k-2}{k}} - v^{\frac{2k-2}{k}} \right]$$

como

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{M_3} (v+j)^{\frac{2-k}{k}} \left[(v+j)^{\frac{2k-2}{k}} - v^{\frac{2k-2}{k}} \right] &\geq \sum_{j=0}^{M_3} (v+j)^{\frac{2-k}{k}} j v^{\frac{k-2}{k}} \\ &= \sum_{j=0}^{M_3} \left(\frac{v}{v+j} \right)^{\frac{k-2}{k}} j \geq M_3^2 \end{aligned}$$

resulta que $M_3 \leq (2^{n-m})^{1/2}$, luego si $\mu \geq \frac{v}{4}$

$$(2^{n-m})^{1/2} \leq \frac{2^{n-m} \mu^{\frac{k-2}{k}}}{\left| v^{\frac{2k-2}{k}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}} \right|}$$

pues el segundo miembro es como $\frac{2^{n-m}}{v-\mu} \cdot (v-\mu)^2 \leq 2^{n-m}$
como se veía en 1.2.1.2 mientras que si $\mu \leq \frac{v}{4}$

$$M_3 \leq (2^{n-m})^{1/2} \leq \frac{2^{(n-m) \left(\frac{1}{2} + \frac{2k-2}{k} \right) \frac{1}{2}}}{\left| v^{\frac{2k-2}{k}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}} \right|}$$

tal como hacíamos en 1.2.1.

Sea ahora $\mu \geq v$ como antes aparecen dos casos

2.1' que $d_v + d_{v+1} + d_\mu \geq \delta 2^n$

$$2.2 \quad \text{o que} \quad d_{\nu+1} + d_{\mu} \leq \delta 2^n$$

$$f(\mu) = d_{\mu} \text{ es creciente pues } f'(\mu) = \delta 2^m \left(1 + \frac{k-2}{k} \nu^{\frac{2k-2}{k}} \mu^{\frac{2-k}{k}} - 1 \right) \geq 0$$

por tanto el caso más desfavorable es tomar el primer
tal que

$$d_{\mu} + d_{\mu-1} + \dots + d_{\mu-M} \geq \delta 2^n$$

Como

$$d_{\mu} + d_{\mu-1} + \dots + d_{\mu-M} = \sum_{j=0}^M (\mu+j)^{\frac{2-k}{k}} \left[(\mu-j)^{\frac{2k-2}{k}} - \nu^{\frac{2k-2}{k}} \right] \delta 2^m$$

hay que hallar tal que

$$\sum_{j=0}^M (\mu-j)^{\frac{2-k}{k}} \left[(\mu-j)^{\frac{2k-2}{k}} - \nu^{\frac{2k-2}{k}} \right] \geq 2^{n-m}$$

Utilizaremos la fórmula de sumación de Abel que
dice

$$\sum_{j=0}^M a_j b_j = s_M b_0 + \sum_{j=0}^M (s_M - s_j) (b_{j+1} - b_j)$$

$$\text{siendo } s_j = a_0 + a_1 + \dots + a_j$$

De este modo

$$\sum_{j=0}^M (\mu-j)^{\frac{2-k}{k}} \left[(\mu-j)^{\frac{2k-2}{k}} - \nu^{\frac{2k-2}{k}} \right] = \sum_{j=0}^M (\mu-j)^{\frac{2-k}{k}} \left[\mu^{\frac{2k-2}{k}} - \nu^{\frac{2k-2}{k}} \right] -$$

$$- \frac{k}{2} \sum_{j=0}^M \left((\mu-j)^{2/k} - (\mu-M)^{2/k} \right) (\mu-j)^{\frac{k-2}{k}}$$

pero

$$\left((\mu-j)^{2/k} - (\mu-M)^{2/k} \right) (\mu-j)^{\frac{k-2}{k}} \leq \left[(\mu-j)^{\frac{2k-2}{k}} - v^{\frac{2k-2}{k}} \right] (\mu-j)^{\frac{2-k}{k}}$$

puesto que al ser $v^{2/k} \leq (\mu-M)^{2/k}$

$$(\mu-j)^{2/k} - (\mu-M)^{2/k} \leq (\mu-j)^{2/k} - v^{2/k}$$

y es

$$\left((\mu-j)^{2/k} - v^{2/k} \right) (\mu-j)^{\frac{k-2}{k}} \leq \left[(\mu-j)^{\frac{2k-2}{k}} - v^{\frac{2k-2}{k}} \right] (\mu-j)^{\frac{2-k}{k}}$$

ya que esta última desigualdad equivale a

$$(\mu-j) - v^{2/k} (\mu-j)^{\frac{k-2}{k}} \leq (\mu-j) - v^{\frac{2k-2}{k}} (\mu-j)^{\frac{2-k}{k}}$$

$$v^{\frac{2k-2}{k}} (\mu-j)^{\frac{2-k}{k}} \leq v^{2/k} (\mu-j)^{\frac{k-2}{k}}$$

pues

$$v^{\frac{2k-2}{k}} - \frac{2}{k} = v^{\frac{2k-2}{k}} \leq (\mu-j)^{\frac{2k-2}{k}}$$

al ser $v \leq \mu-j$ para todo

Luego nos queda

$$2^{n-m} \geq 2 \sum_{j=0}^M (\mu-j)^{\frac{2-k}{k}} \left((\mu-j)^{\frac{2k-2}{2}} - v^{\frac{2k-2}{k}} \right) \geq$$

$$\sum_{j=0}^M (\mu-j)^{\frac{2-k}{k}} \left(\mu^{\frac{2k-2}{k}} - v^{\frac{2k-2}{k}} \right) \geq$$

$$M \mu^{\frac{2-k}{k}} \left(\mu^{\frac{2k-2}{k}} - v^{\frac{2k-2}{k}} \right)$$

con lo cual

$$M \leq \frac{2^{n-m} \mu^{\frac{k-2}{k}}}{\left| \mu^{\frac{2k-2}{k}} - v^{\frac{2k-2}{k}} \right|}$$

2.2 En este caso

$$\sum_{j=0}^{\mu-v} (v+j)^{\frac{2-k}{k}} \left(\mu^{\frac{2k-2}{k}} - (v+j)^{\frac{2k-2}{k}} \right) \leq 2^{n-m}$$

$$\mu \leq 2v$$

$$\sum_{j=0}^{\mu-v} (v+j)^{\frac{2-k}{k}} \left(\mu^{\frac{2k-2}{2}} - (v+j)^{\frac{2k-2}{k}} \right) \cong \mu^{\frac{2-k}{k}} \sum_{j=0}^{\mu-v} (\mu-v-j)^{\frac{k-2}{k}} \cong$$

$$(\mu-v)^2 - \frac{(\mu-v)^2}{2} = \frac{1}{2} (\mu-v)^2$$

mientras que s. $\mu \geq 2v$

$$\sum_{j=0}^{\mu-v} (v+j)^{\frac{2-k}{k}} \left(\mu^{\frac{2k-2}{k}} - (v+j)^{\frac{2k-2}{k}} \right) \cong \mu^{\frac{2k-2}{k}} \sum_{j=0}^{\mu-v} (v+j)^{\frac{2-k}{k}} - \sum_{j=0}^{\mu-v} (v+j)^{\frac{2-k}{k}}$$

$$\mu^{\frac{2k-2}{k}} \frac{k}{2} (\mu^{2/k} - v^{2/k}) - \frac{1}{2} (\mu^2 - v^2) \cong \frac{k-1}{2} \mu$$

Luego en ambos casos se cumple lo deseado y el razonamiento sigue como en 1.2 ■

4.55 Lema

Para cada uno de los casos anteriores (pág. 170)
se tiene

$$(a) \int |\phi_{njv} * \phi_{m\ell\mu}(x)|^s dx \leq C \delta^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k})(s+1)} 2^{3n} 2^{3ms} v^{\frac{2-k}{k}} \mu^{\frac{2-k}{k}s}$$

$$(b) \int |\phi_{njv} * \phi_{m\ell\mu}(x)|^s dx \leq C \delta^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k})(s+1)} \frac{2^{n(2+s)} 2^{m(2s+1)}}{v^{\frac{k-2}{k}} \mu^{\frac{k-2}{k}} \left(\left| v^{\frac{2k-2}{k}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}} \right| + 1 \right)^{s-1}}$$

$$(c) \int |\phi_{njv} * \phi_{m\ell\mu}(x)|^s dx \leq C \delta^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k})(s+1)} 2^{n(2+s)} 2^{m(2s+1)} v^{\frac{2-k}{k}s} \mu^{\frac{2-k}{k}s}$$

$$(d) \int |\phi_{njv} * \phi_{m\ell\mu}(x)|^s dx \leq C \delta^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k})(s+1)} \frac{2^{n(2+s)} 2^{m(2s+1)}}{v^{\frac{k-2}{k}} \mu^{\frac{k-2}{k}} \left(\left| v^{\frac{2k-2}{k}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}} \right| + 1 \right)^{s-1}}$$

Demostración

Es análoga a la demostración del lema 2.18 con las obvias modificaciones. \square

De acuerdo con los lemas 4.50 y 4.55 y teniendo en cuenta que en el caso (c) es

$$\mu^{\frac{2-k}{k}} 2^m \geq \nu^{\frac{2-k}{k}} 2^n \quad \text{y que en (d) es}$$

$$\mu^{\frac{2-k}{k}} 2^m \leq \nu^{\frac{2-k}{k}} 2^n, \quad \text{después de algunos cálculos queda}$$

$$\int \left| \sum_{\nu} a_{nj\nu} \phi_{nj\nu}^* \sum_{\mu} a_{m\ell\mu} \phi_{m\ell\mu}(x) \right|^s dx \leq$$

$$C \frac{2^{n(\frac{3k-2}{2k}s + \frac{3k+2}{2k})} 2^{m(\frac{3k+2}{2k}s + \frac{3k-2}{2k})} |a_{nj\nu}|^s |a_{m\ell\mu}|^s}{\mu^{\frac{k-2}{k}s} \nu^{\frac{k-2}{k}} \left(\left| \nu^{\frac{2k-2}{2}} - \mu^{\frac{2k-2}{k}} \right| + 1 \right)^{s-1}}$$

Poniendo ahora esta expresión en 4.49, aplicando la integración fraccionaria del lema 4.12 y agrupando términos queda, poniendo $p_1 s = q$

$$\left(\int \left| \sum_n \sum_{j\ell} \sum_{\nu\mu} \frac{a_{nj\nu}}{2^{\frac{3k}{p_1}}} \frac{a_{n-r,\ell,\mu}}{2^{(n-r)\frac{3k}{p_1}}} \phi_{nj\nu}^* \phi_{n-r,\ell,\mu}(x) \right|^s dx \right)^{1/s} \leq$$

$$C 2^{-r\frac{s-1}{ks}} \delta^{\frac{(k+1)(s-1)}{s}} \left| \sum_n \left(\sum_{j\nu} |a_{nj\nu}|^{q'} 2^{3n} \nu^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k}} \right)^{1/p_1} \right.$$

$$\cdot \left. \left(\sum_{\ell\mu} |a_{n-r,\ell,\mu}|^{q'} 2^{3(n-r)} \mu^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k}} \right)^{1/p_1} \right|^{1/s}$$

tomando ahora $\geq 2k$, como en el primer caso,

$$\sum_n \left(\sum_{jv} |a_{njv}|^{q'} 2^{3n} v^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k}} \right)^{1/p_1} \left(\sum_{\ell\mu} |a_{n-r,\ell,\mu}|^{q'} 2^{3(n-r)} \mu^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k}} \right)^{1/p_1} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{njv} |a_{njv}|^{q'} 2^{3n} v^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k}} \right)^{2/p_1}$$

De donde resulta

$$\sum_{(b)} \leq c \left(\sum_{r \geq 0} 2^{-r \frac{s-1}{ks}} \right) \delta^{\frac{(k+1)(s-1)}{s}} \left(\sum_{njv} |a_{njv}|^{q'} 2^{3n} v^{\frac{2-k}{k}} \delta^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k}} \right)^{2/q'}$$

Pero

$$\sum_{r \geq 0} 2^{-r \frac{s-1}{ks}} \cong \frac{1}{\log 2} \frac{s-1}{ks} \leq c$$

por tanto, teniendo en cuenta que $\frac{1}{q} = \frac{(k+1)(s-1)}{2s}$ al ser

$$q = \frac{p'}{k+1} \quad \frac{2}{p'} + \frac{1}{s} = \quad \text{finalmente queda}$$

$$\left\| \sum_{njv} \frac{a_{njv}}{2^{\frac{3k}{k+1}} \frac{1}{q}} \hat{\phi}_{njv} \right\|_{p'} \leq c \left(\sum_{(a)} \dots \sum_{(b)} \right)^{1/2} \leq$$

$$c \delta^{1/q} \left(\sum_{njv} |a_{njv}|^{q'} 2^{3n} v^{\frac{2-k}{k}} \delta^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{k})} \right)^{1/q'}$$

lo que prueba 4.40 y acaba la demostración. ■

.56 Corolario

Si Γ es un trozo compacto del cono Γ

$$4.57 \quad \left(\int_{\Sigma} |\hat{f}(\xi)|^q d\mu(\xi) \right)^{1/q} \leq c_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^3)$, siendo $d\mu(\xi)$ la medida
de Lebesgue sobre Γ $\leq q \leq \frac{p'}{k+1}$, $p' > k+1$

Demostración

Es como el corolario 2.23. \blacksquare

4.58 Proposición

Dada la superficie del cono de sección $(t, t^k) I$

$$4.59 \quad \left(\int_{\Gamma} |\hat{f}(\xi)|^q r^\alpha dr d\theta \right)^{1/q} \leq c_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

siendo $\alpha = \frac{3q}{p'} -$ $\leq q \leq \frac{p'}{k+1}$, $p' \geq 2k$ ($p' > 4$ si $k=2$)

Demostración

Es como la proposición 2.25. \blacksquare

R E F E R E N C I A S

REFERENCIAS

- [1] J.M. Ash (Editor), "Studies in Harmonic Analysis",
MAA Studies in Math. nº 13, The Mathematical Association
of America.
- [2] . Bochner, "Summation of Multiple Fourier Series by
Spherical Means", Trans. Amer. Math. Soc. 40, (1936),
175-207.
- [3] A.P. Calderón and A. Zygmund, "On Singular Integrals",
Amer. J. Math. 78, (1956), 289-309.
- [4] Carleson and P. Sjölin, "Oscillatory Integrals and
a Multiplier Problem for the Disc", Studia Math. 44,
(1972), 287-299.
- [5] F.M. Christ, "Restriction of the Fourier Transform to
Submanifolds of Low Codimension", Thesis, University of
Chicago, 1982.
- [6] . Córdoba, "The Kakeya Maximal Function and the Sph-
erical Summation Multipliers", Amer. J. Math. 99, (1977)
1-22.
- [7] . Córdoba, "The Multiplier Problem for the Polygon",
Ann. of Math. 105, (1977), 581-588.
- [8] . Córdoba, "A Note on Bochner-Riesz Operators", Duke
Math. J. 46, (1979), 505-511

- [9] Córdoba, "Euclidean Harmonic Analysis", Proceedings University of Maryland 1979, Lecture Notes nº 779, Springer Verlag, 154-162.
- [10] Fefferman, "Inequalities for Strongly Singular Convolution Operators", Acta Math. 124, (1970), 9-36.
- [11] Fefferman, "A Note on Spherical Summation Multipliers", Isr. J. Math., Vol. 15, (1973), 44-51
- [12] Fefferman, "The Multiplier Problem for the Ball" Ann. of Math. 94, (1971), 330-336.
- [13] I.M. Gelfand, G.E. Shilov, "Generalised Functions", Vol. 1, Academic Press, New York, London, 1964.
- [14] C.S. Herz, "On the Mean Inversion of Fourier and Hankel Transforms", Proc. Nat. Acad. Sc. USA, 40, (1954), 996-999.
- [15] L. Hörmander, "Oscillatory Integrals and Multipliers on FL^p ", Ark. Math., 11 (1973), 1-17
- [16] De Leeuw, "On L^p Multipliers", Ann. of Math., 91, (1965), 364-379.
- [17] López Melero, "Análisis armónico en \mathbb{R}^n : tres escenarios", Tesis, Universidad Autónoma de Madrid, 1981.
- [18] Men-Chang Hu, "Note on Restriction of Fourier Transforms", Proceedings of AMS, Vol. 87, nº 2, (1983).

- [19] Prestini, "A Restriction Theorem for Space Curves"
Proc. Amer. Math. Soc., 70, (1978), 8-10.
- [20] E. Prestini, "Restriction Theorems for the Fourier
Transform to some Manifolds in \mathbb{R}^n ", Proceedings of
Symposia in Pure Math., Vol. XXXV Part 1 1979, 101-109.
- [21] A. Ruíz, "Multiplicadores asociados a curvas en el
plano y teoremas de restricción de la transformada de
Fourier a curvas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 ", Tesis, Universidad Com-
plutense de Madrid, 1980.
- [22] A. Ruíz, "On the Restriction of Fourier Transforms to
Curves", Conference on Harmonic Analysis in Honour of
Antoni Zygmund, Vol. 7, University of Chicago, 1983,
186-211
- [23] P. Sjölin, "Fourier Multipliers and Estimates of the
Fourier Transform of Measures Carried by Smooth
Curves in \mathbb{R}^2 ", Studia Math., 7. LI, (1974), 169-182.
- [24] E.M. Stein, "Interpolation of Linear Operators",
Trans. Amer. Math. Soc., 87, (1958), 159-172.
- [25] E.M. Stein, "Some Problems in Harmonic Analysis",
Proceedings of Symposia in Pure Math., Vol. XXXV,
1979.
- [26] E.M. Stein, "The Development of Square Functions in
the Work of A. Zygmund", Bull. Amer. Math. Soc., Vol.
7 nº 2, (1982), 359-376.

- [27] E.M. Stein, "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions", Princeton Math. Ser. nº 30, Princeton Univ. Press, Princeton N.J. 1970.
- [28] E.M. Stein and G. Weiss, "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces", Princeton Math. Ser. nº 32, Princeton Univ. Press, Princeton N.J. 1971
- [29] R.S. Strichartz, "Restriction of Fourier Transforms to Quadratic Surfaces and Decay of Solutions of Wave Equations", Duke Math. J. 44, (1977), 705-714.
- [30] Tomas, "A Restriction Theorem for the Fourier Transform", Bull. of the Amer. Math. Soc. 81, (1975) 477-478.
- [31] Tomas, "Restriction Theorems for the Fourier Transform", Proceedings of Symposia in Pure Math., Vol. XXXV, Part 1 (1979), 111-114.
- [32] Tomas, "A Note on Restriction", Indiana Univ. Math. Journal, Vol. 29 nº 2, (1980), 287-292.
- [33] Watson, "Theory of Bessel Functions", Cambridge Univ. Press, 1962.
- [34] J.D. Watson, "La doble hélice", Colección el Arca de Papel, nº 142, Plaza & Janés editores, Dic. 1978.
- [35] Zygmund, "A Cantor-Lebesgue Theorem for Double Trigonometric Series", Studia Math., T. TLIII, (1972), 173-178.

- [36] Zygmund, "On Fourier Coefficients and Transform
of Functions on Two Variables", *Studia Math.*, T.L
(1974), 189-201.
- [37] Zygmund, "Trigonometric Series", 2^a ed., Cambridge
Univ. Press, London, New York, 1959.

Reunido el Tribunal que suscribe en el
de la fecha, acordó calificar la presente Tesi
Doctoral con la calificación de Sobresaliente con la nota 10
Madrid, 29-9-83

Alberto San

Alonso

Caro

Pablo

Henar



UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID



5407882702